2014-12-12 - Lezione 42

recupero - venerdì 10.30-12.30

Diciamo che esiste $f'(x_0)$ se esiste $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$

Quando $f: A \to \mathbb{R}$, si viene a costruire in tal modo

$x_0 \longmapsto f'(x_0)$, una nuova funzione $f': B \to \mathbb{R}$

con $B \subseteq A$ (in generale $B \neq A$!)

Esempio

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3 \longrightarrow f': \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2$

2) $f: [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow f':]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(in $x=0$ f esiste continua, mentre $f'(x)$ non è definita in $x=0$ e si ha $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$, ovvero in $x=0$ esiste la derivata di f !)

Oss: perché si prende $e = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ come base dei logaritmi

$f(x) = e^x \qquad \frac{df}{dx} = f'(x) = \underline{\underline{e^x}}$

mentre

$g(x) = 10^x = \left(e^{\log 10}\right)^x = e^{x \log 10} \qquad \frac{d}{dx} g(x) = g'(x) = e^{x\log 10} \cdot \log 10$

$= \underline{\underline{10^x \cdot \log 10}}$

Antiderivazione (o ricerca delle primitive)

Def (Primitiva)

Data $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua.
Una funzione $F: I \to \mathbb{R}$ si dice "primitiva di f"
se $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

Oss: Ricercare la primitiva significa "antiderivare",
ovvero operare con l'inverso dell'operatore derivata,
" invertire l'operatore di derivazione

Esempio

$$\left.\begin{aligned}
f(x) = x^n \quad n \neq -1 \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
f(x) = \frac{1}{x} \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \log|x| \\
f = \operatorname{sen} x \quad &\Rightarrow \quad F(x) = -\cos x \\
f = \cos x \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \operatorname{sen} x \\
f = e^x \quad &\Rightarrow \quad F(x) = e^x
\end{aligned}\right\}$$

Abbiamo letto la Tabella delle derivate a rovescio

Oss $F(x) = \operatorname{sen} x$ è una primitiva di $f(x) = \cos x$

però

$G(x) = \operatorname{sen} x + \sqrt{30}$ è una primitiva di $f(x) = \cos x$

$H(x) = \operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{40}}{\pi}$ " " " " $f(x) = \cos x$

infatti

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen} x + \sqrt{30}\right) = \cos x \quad !!!$$

Teorema

Data $f(x)$ $f: I \to \mathbb{R}$ intervallo, f continua

Se $F(x)$ $F: I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f

allora $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, è una primitiva di f

dim immediato! $\boxed{\text{////}}$

Oss: Data una funzione $f: I \to \mathbb{R}$, se esiste $F(x)$ primitiva allora ne esistono ∞ altre date da

$$F(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Sono tutte qui? o ce ne sono altre?

Teorema (due primitive differiscono per una costante)

$f: I \to \mathbb{R}$ continua, date $F, G: I \to \mathbb{R}$ primitive di f
I intervallo

Allora $\exists\, c \in \mathbb{R} : F(x) - G(x) = c \quad \forall x \in I$

dim

$F, G: I \to \mathbb{R}$ derivabili su I intervallo

$$\frac{d}{dx}(F - G) = \frac{dF}{dx} - \frac{dG}{dx} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sono primitive di } f}}{=} f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

Allora $\exists\, c \in \mathbb{R} : F(x) - G(x) = c \quad \forall x \in I$ $\boxed{\text{////}}$

Tabella delle primitive

$f(x) = x^m \quad m \neq -1 \implies F(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \quad c \in \mathbb{R}$

$f(x) = 1/x \implies F(x) = \log|x| + c \quad c \in \mathbb{R}$

$f(x) = e^x \implies F(x) = e^x + c \quad c \in \mathbb{R}$

$f(x) = \operatorname{sen} x \implies F(x) = -\cos x + c \quad c \in \mathbb{R}$

$f(x) = \cos x \implies F(x) = \operatorname{sen} x + c \quad c \in \mathbb{R}$

Def (Integrale Indefinito)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua

diciamo "Integrale indefinito di f" l'insieme di TUTTE LE PRIMITIVE DI f

e lo indichiamo con

$$\int f(x)\,dx = \{\text{primitive di } f\}$$

Esempio

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Oss

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$$

$$\int \left(\frac{df}{dx}\right) dx = f(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Pb: come calcolare la primitiva di $x \cdot e^x$?

" " " " " $2x \cdot \operatorname{sen}(x^2)$?

Dato che la ricerca delle primitive è legata all'operatore di derivazione, devo aspettarmi che

"regole" di derivazione $\longrightarrow$ "regole" ricerca primitive

Pb: Quante sono le "regole" di derivazione?

Derivazione di una somma $\longrightarrow$ Primitiva di una somma

" " " prodotto $\longrightarrow$? Integrazione x Parti

" " " composizione $\longrightarrow$? " x Sostituzione

OSS: Mentre, data una funzione derivabile, sapevo sempre come calcolare la derivata

Nel caso delle primitive c'è un grosso problema

Esistono $f: I \to \mathbb{R}$ che possiedono una primitiva F però non so come esprimere F in termini di funzioni elementari

Ad esempio $f(x) = e^{x^2}$, che è continua su $\mathbb{R}$, possiede ∞ primitive date da

$$F(x) = \underbrace{\int_0^x e^{t^2} dt} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

(Vedi Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale)

ma non so scrivere $F(x)$ come somma, prodotto, composizione di f.ni elementari

Integrazione per parti

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

$\Downarrow$ Se due funzioni coincidono allora coincidono gli integrali indefiniti

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = \int \left[(u\cdot v)'(x) - u(x)\cdot v'(x)\right] dx$$

$$= \int (u\cdot v)'(x)\,dx - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx}\ .$$

Regola di Integrazione per parti

oppure, detta $U(x)$ una primitiva di $u(x)$

$$\int u(x)\cdot v(x)\,dx = U(x)\cdot v(x) - \int U(x)\cdot v'(x)\,dx$$

Esempio Calcolare $\int x\cdot e^x dx$

dice

$$\underbrace{\int \underset{v'}{x}\cdot \underset{u}{e^x}\,dx}_{\text{punto di partenza}} = \underset{u}{e^x}\cdot \underset{v}{\frac{x^2}{2}} - \underbrace{\int \underset{u'}{e^x}\cdot \underset{v}{\frac{x^2}{2}}\,dx}_{\text{punto di arrivo}}$$

e siamo giunti a qualcosa di più complicato!

ho "complicato" l'integrale da calcolare, quindi provo a battezzare le funzioni in gioco in modo diverso

$$\int \underset{u}{x}\cdot \underset{v'}{e^x}\,dx = \underset{u}{x}\cdot \underset{v}{e^x} - \int \underset{u'}{1}\cdot \underset{v}{e^x}\,dx =$$

$$= x\cdot e^x - e^x + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

Verifico: $\left(x\cdot e^x - e^x + c\right)' = 1\cdot e^x + x\cdot e^x - e^x = x e^x$ ✓

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

l'idea è "scaricare" la derivata da una funzione all'altra e sperare che il nuovo integrale indefinito sia più semplice da calcolare

Esempio Calcolare tutte le primitive di $f = x^2 \operatorname{sen} x$

dire

$$\int \underset{u}{x^2} \cdot \underset{v'}{\operatorname{sen} x}\, dx = \underset{u}{x^2} \cdot \underset{v}{(-\cos x)} - \int \underset{u'}{2x} \cdot \underset{v}{(-\cos x)}\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \int \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{\cos x}\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \left\{ \underset{u}{x} \cdot \underset{v}{\operatorname{sen} x} - \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{\operatorname{sen} x}\, dx \right\}$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \left\{ x \cdot \operatorname{sen} x - (-\cos x) + c \right\} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Verifica: $\left(-x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + c\right)' = \cancel{-2x \cos x} + x^2 \operatorname{sen} x + \cancel{2 \operatorname{sen} x}$
$\cancel{+2x \cos x} - \cancel{2 \operatorname{sen} x}$ ✓

Per casa Calcolare $\int x^2 e^x\, dx$

Calcolare $\int x^2 \cos x\, dx$

Esempio Calcolare tutte le primitive di $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

dim

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \underset{u}{\operatorname{sen} x} \cdot \underset{v'}{\operatorname{sen} x} \, dx = \underset{u}{\operatorname{sen} x} \underset{v}{(-\cos x)} - \int \underset{u'}{\cos x} \cdot \underset{v}{(-\cos x)} \, dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

$$\Downarrow$$

$$2 \cdot \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2}\left(x - \operatorname{sen} x \cos x\right) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Verifica: $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x + c\right)' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x$$

Esempio Calcolare $\int \cos^2 x \, dx$

dim

$$\int \cos^2 x \, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) dx = x - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + c$$

$$= \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Per caso: calcolare $\int \cos^3 x \, dx = \int \cos x \cos^2 x \, dx$ ---

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = \int \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x \, dx$$

Esempio Calcolare tutte le primitive di $f(x) = \operatorname{arctg} x$

dim

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{\operatorname{arctg} x} \, dx = \underset{u}{x} \cdot \underset{v}{\operatorname{arctg} x} - \int \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{\frac{1}{1+x^2}} \, dx$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$

è la derivata di $\log(1+x^2)$ (ho anticipato la integrazione per sostituzione)

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c$$

$c \in \mathbb{R}$

Verifica: $\left(x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c\right)' = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2}$

$= \operatorname{arctg} x$ ✓

Esempio Calcolare tutte le primitive di $f(x) = \log x$

dim

$$\int \log x \, dx = \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{\log x} \, dx = \underset{u}{x} \cdot \underset{v}{\log x} - \int \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{\frac{1}{x}} \, dx$$

$$= x \log x - \int 1 \cdot dx = x \log x - x + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Verifica: $\frac{d}{dx}\left(x \log x - x + c\right) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \log x$ ✓

Integrazione per sostituzione

$$\frac{d}{dx}\left(f\circ g\right) = \frac{df}{dy}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(f\circ g\right) dx = \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(f\circ g)(x) + c = \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx \qquad c \in \mathbb{R}}$$

Una prima forma dell'integrazione per sostituzione

Qualora $F(x)$ sia una primitiva di $f(x)$

$$\boxed{\begin{aligned}\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx &= F(g(x)) + c \\ &= (F\circ g)(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}\end{aligned}}$$

ovvero anche $F(x)$ una primitiva di f

$$\int (f\circ g)(x) \cdot g'(x)\, dx = (F\circ g)(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

ovvero

$$\int (f\circ g)(x)\, g'(x)\, dx = \left(\int f(y)\, dy\right)_{y=g(x)}$$

$$= F(g(x)) + c$$

$$f(y) = \frac{1}{1+y} \quad g(x) = x^2$$

$$\int (f \circ g)(x) \cdot g'(x)\,dx = \int \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x\,dx$$

$$= \left(\int f(y)\,dy \right)_{y=x^2}$$

$f(y) = \frac{1}{1+y}$

$F(y) = \log|1+y|$

$$= \left(\int \frac{1}{1+y}\,dy \right)_{y=x^2}$$

$$= \left(\log|1+y| + c \right)_{y=x^2} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= \log(1+x^2) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

marino.belloni@unipr.it