$x_0 \in \mathring{A}$ se $\exists \delta > 0 :]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq A$

Teorema (Corollario del teorema di H'Ospital)

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{A}$, f derivabile in $A \setminus \{x_0\}$

$\exists \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \alpha_-$ $\exists \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \alpha_+$

1) Allora $f'_-(x_0) = \alpha_-$ e $f'_+(x_0) = \alpha_+$

2) $\alpha_- = \alpha_+ \Rightarrow \exists f'(x_0) = \alpha_- = \alpha_+$

dim

1) $f'_-(x_0) \underset{\text{Def}}{=} \lim_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{(H)}{=} \lim_{x\to x_0^-} \dfrac{f'(x)-0}{1-0} = \lim_{x\to x_0^-} f'(x) \underset{\text{Ip}}{=} \alpha_-$

$f'_+(x_0) \underset{\text{Def}}{=} \lim_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{(H)}{=} \lim_{x\to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \alpha_+$

2) $\alpha_- = \alpha_+ \overset{(1)}{\Rightarrow} f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \Rightarrow f$ derivabile e $f'(x_0) = \alpha_- = \alpha_+$ $\boxed{\text{M}}$

Esercizio

Determinare $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = \begin{cases} (\alpha-1)x + \beta - \alpha & x > 0 \\ 3 & x = 0 \\ \gamma x - x^2 - 3\beta & x < 0 \end{cases}$

sia derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$

dim

$x < 0 \Rightarrow f(x) = \gamma x - x^2 - 3\beta$ che è un polinomio ed è derivabile $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ in tutti gli $x < 0$

$x > 0 \Rightarrow f(x) = (\alpha-1)x + \beta - \alpha$ che è un polinomio ed è derivabile $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ in tutti gli $x > 0$

f continua in $x = 0$? $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} ((\alpha-1)x + \beta - \alpha) = \beta - \alpha = f(0) = 3$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (\gamma x - x^2 - 3\beta) = -3\beta$

quindi $\begin{cases} \beta - \alpha = 3 \\ -3\beta = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - 3 = -4 \\ \beta = -1 \end{cases}$

Quando $\alpha = -4$ e $\beta = -1$, $\forall \gamma$, f continua su tutto $\mathbb{R}$

Per la derivabilità in $x=0$ osserva che

$$f'(x)=\begin{cases} \gamma-2x & x<0 \\ \alpha-1 & x>0 \end{cases}$$

affinché f sia derivabile in $x=0$, è necessario che

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = f'_-(0) = \gamma = f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \alpha-1$$

Teorema precedente

$$\Rightarrow \gamma = \alpha-1 = -5$$

quindi, in definitiva, f derivabile su $\mathbb{R}$ sse $\alpha=-4$ $\beta=-1$ $\gamma=-5$

Polinomi di Taylor

Def

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$ diciamo che $T_n(x)$ è "polinomio di Taylor relativo ad f, centrato in x_0, di ordine n"
se $f(x) - T_n(x) = o\left((x-x_0)^n ; x_0\right)$

Oss $f:]a,b[$, $x_0 \in]a,b[$, f derivabile in x_0
si ha che $\boxed{f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)\right) = o\left((x-x_0) ; x_0\right)}$ (*)
per definizione di f.ne differenziabile (equivale a derivabile)
ma, nel linguaggio dei polinomi di Taylor,
$r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ è
polinomio di Taylor di ordine 1, centrato in x_0, relativo ad f

$r(x)$ è anche la retta tangente al grafico di f nel punto x_0

Teorema (unicità polinomio di Taylor)

Data $f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$
Se esiste $T_n(x)$ polinomio Taylor ordine n centrato in x_0 relativo ad f
allora questo è unico

Esempio Polinomio di Taylor ordine 4 centrato in $x=0$ di $f(x) = \operatorname{sen} x$

dim

$f(x) = \operatorname{sen} x$ $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x$ $\qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$ $\qquad f'''(0) = -1$

$f^{(IV)}(x) = \operatorname{sen} x$ $\qquad f^{(IV)}(0) = 0$

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k = \underbrace{\frac{0}{0!} \cdot 1}_{k=0} + \underbrace{\frac{1}{1!} \cdot x}_{k=1} + \underbrace{\frac{0}{2!} \cdot x^2}_{k=2} + \underbrace{\frac{-1}{3!} x^3}_{k=3} + \underbrace{\frac{0}{4!} x^4}_{k=4}$$

$$= x - \frac{x^3}{6}$$

$\blacksquare$

OSS: Con questa costruzione si ha che

$P_n^{(k)}(x_0) \equiv$ derivata k-esima di P_n in $x_0 \equiv f^{(k)}(x_0) =$ derivata k-esima di f in x_0 $\qquad k = 0, \dots, n$

Ovvero coincidono tutte le derivate fino a n compreso di P_n e di f in x_0!!

(nel caso precedente $x_0 = 0$!)

Teorema (Formula di Taylor con il resto di Peano)

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$

- f derivabile $(n-1)$ volte in $]a,b[$
- " n " in x_0

posto

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Allora $f(x) - P_n(x) = \underbrace{o\left((x-x_0)^n; x_0\right)}_{\text{resto di Peano}}$

dim (si basa sul Teorema dell'Hôpital)

Devo provare che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

$$P_n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \underset{k=0}{f(x_0)} + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot\underset{=0}{(x_0-x_0)} + \dots + \frac{f^{(n)}}{n!}\underset{=0}{(x_0-x_0)^n}$$

$$= f(x_0)$$

$$P_n'(x) = \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n\right)' = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

$$P_n'(x_0) = f'(x_0)$$

$$\begin{cases} P_n''(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + \dots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} \\ P_n''(x_0) = f''(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0) \\ P_n^{(n-1)}(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0) \\ P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-P_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x_0)-P_n''(x_0)}{n\cdot(n-1)\,(x-x_0)^{n-2}}$$

$\left(\frac{0}{0}\right) \qquad \left(\frac{0}{0}\right) \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'''(x_0)-P_n'''(x_0)}{n(n-1)(n-2)\,(x-x_0)^{n-3}} \overset{(H)}{=} \underset{\text{dopo } (n-1) \text{ applicazioni dell'Hopital}}{- - - =} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x)}{n!\cdot(x-x_0)}$$

$\left(\frac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!\,(x-x_0)} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)}}_{f^{(n)}(x_0)} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) = 0$$

Pb: $10^{-6}\cdot(x-x_0)^{n+1} = o\left((x-x_0)^n; x_0\right)$

come pure

$10^{12}\cdot(x-x_0)^{n+3} = o\left((x-x_0)^n; x_0\right)$

ma quando $x \neq x_0$, queste due funzioni hanno un andamento ben diverso (si confronti $10^{-2}(x-1)^3$ con $10^{2}(x-1)^3$, per capire)

Esercizio Dato il polinomio $f(x) = 2 - x^2 + x^3 - 3x^5$

Calcolare

- Sviluppi di Taylor centrati in $x_0 = 0$
- " " " " " $x_0 = 1$

dim

$f(x) = 2 - x^2 + x^3 - 3x^5$	$f(0) = 2$	$f(1) = -1$
$f'(x) = -2x + 3x^2 - 15x^4$	$f'(0) = 0$	$f'(1) = -2+3-15 = -14$
$f'' = -2 + 6x - 60x^3$	$f''(0) = -2$	$f''(1) = -2+6-60 = -56$
$f''' = 6 - 180x^2$	$f'''(0) = 6$	$f'''(1) = 6 - 180 = -174$
$f^{(IV)} = -360x$	$f^{(IV)}(0) = 0$	$f^{(IV)}(1) = -360$
$f^{(V)} = -360$	$f^{(V)}(0) = -360$	$f^{(V)}(1) = -360$

in $x = 0$

$P_0(x) = 2$

$P_1(x) = 2$

$P_2(x) = 2 - \frac{2}{2!}(x-0)^2 = 2 - x^2$

$P_3(x) = 2 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3 = 2 - x^2 + x^3$

$P_4(x) = 2 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3$

$P_5(x) = 2 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3 - \frac{360}{120} \cdot x^5 =$
$= f(x)$

in $x = 1$

$P_0(x) = -1$

$P_1(x) = -1 - 14(x-1)$

$P_2(x) = -1 - 14(x-1) - \frac{56}{2!}(x-1)^2$

$P_3(x) = -1 - 14(x-1) - 28(x-1)^2 - \frac{174}{6}(x-1)^3$

$P_4(x) = -1 - 14(x-1) - 28(x-1)^2 - \frac{174}{6}(x-1)^3$
$- \frac{360}{4!} \cdot (x-1)^4$

$P_5(x) = f(x)$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Teorema (formula di Taylor con il resto di Lagrange)

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$, f derivabile $(n+1)$ volte in $]a,b[$

Posto $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Allora $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ dove $z \in]a,b[$ t.c. $|z - x_0| < |x - x_0|$

(z è compreso tra x e x_0)

dim (idea)

Considero
$$\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\left(f(x)-P_n(x)\right)-\overbrace{\left(f(x_0)-P_n(x_0)\right)}^{=0}}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}} = \frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{\varphi_n(x)-\varphi_n(x_0)}$$

dove $\phi = f(x)-P_n(x)$ e $\varphi_{n+1} = (x-x_0)^{n+1}$

ϕ e φ_{n+1} soddisfano le ipotesi del Teorema di Cauchy, e quindi $\exists z_1 \in]a,b[$ $|z_1-x_0|<|x-x_0|$ t.c.
$$\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f'(z_1)-P_n'(z_1)}{(n+1)(z_1-x_0)^n} = \frac{\phi'(z_1)-\overbrace{\phi'(x_0)}^{=0}}{(n+1)\left(\varphi_n(z_1)-\varphi_n(x_0)\right)}$$

ed ora $\phi'(z)=f'(z)-P_n'(z)$ e $\varphi_n(z)$ soddisfano le ipotesi del Teorema di Cauchy, e dunque $\exists z_2 \in]a,b[$ con $|z_2-x_0|<|z_1-x_0|<|x-x_0|$ t.c.
$$\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\phi''(z_2)}{(n+1)\,n\,(z_2-x_0)^{n-1}} = \frac{f''(z_2)-P_n''(z_2)}{(n+1)\,n\cdot(z_2-x_0)^{n-1}}$$

dopo $(n+1)$ passi si determina $z_{n+1} \in]a,b[$ t.c. $|z_{n+1}-x_0|<|z_n-x_0|<\dots<|x-x_0|$ e
$$\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(z_{n+1})-P_n^{(n+1)}(z_{n+1})}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(z_{n+1})}{n!}$$

che è la tesi $\blacksquare$

Esercizio Stimare l'errore commesso sostituendo a $\operatorname{sen}\frac{1}{2}$ il valore $P_3\left(\frac{1}{2}\right)$ ove $P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$

dim

Sviluppo $f = \operatorname{sen} x$ in un intorno di $x_0 = 0$: si ha $\exists z$

$$\operatorname{sen} x = P_3(x) + \frac{f^{(IV)}(z)}{4!}(x-0)^4$$

ma ricordando che $P_3(x) = P_4(x)$ ($f = \sin x$ è dispari)

si ha

$$\operatorname{sen} x - P_4(x) = \frac{f^{(V)}(z)}{5!}x^5 = \frac{\cos z}{5!}x^5$$

$f' = \cos x$ $\quad f''' = -\cos$

$f'' = -\operatorname{sen}$ $\quad f^{IV} = \operatorname{sen}$

Quando $x = \frac{1}{2}$ trovo che $\exists z$: $|z| < \frac{1}{2}$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2} - P_4\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{1}{2} - P_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\cos z}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\Rightarrow \left|\operatorname{sen}\frac{1}{2} - \frac{23}{48}\right| \leq \frac{|\cos z|}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{120} = \frac{1}{3840}$$

$\operatorname{sen}\frac{1}{2} \underset{\uparrow \text{calcolatore}}{\cong} 0{,}4794255 \qquad \frac{23}{48} = 0{,}4791667$ (valore esatto!)

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2} - \frac{23}{48} \underset{\uparrow \text{circa}}{\cong} \underbrace{0{,}0002588}_{\text{questo è l'errore calcolato con un calcolatore}} < \underbrace{\frac{1}{3840} = 0{,}0002604}_{\text{questa è la stima data dal Th. Taylor con resto Lagrange}}$$