Teorema de l'Hôpital $\left(\frac{0}{0}\right)$

$f,g :]a,b[\to \mathbb{R}$, f,g derivabile $\forall x \in]a,b[$

1) $g'(z) \neq 0 \quad \forall z \in]a,b[$

2) $\lim_{x \to a^+} f = \lim_{x \to a^+} g = 0$

3) $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$

Allora $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Controesempio 1

$$+\infty = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x} \neq \lim_{x \to 0^+} \frac{\overset{(\cos x)'}{-\operatorname{sen} x}}{\underset{(x)'}{1}} = 0$$

in questo caso NON vale l'Hôpital poiché $\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x}$ non è della forma $0/0$ (o ∞/∞)

Controesempio 2

Sia $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} \neq \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{1}$

Infatti se $x \neq 0$ allora $f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$\stackrel{!}{=} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Se $x = 0$ allora $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$

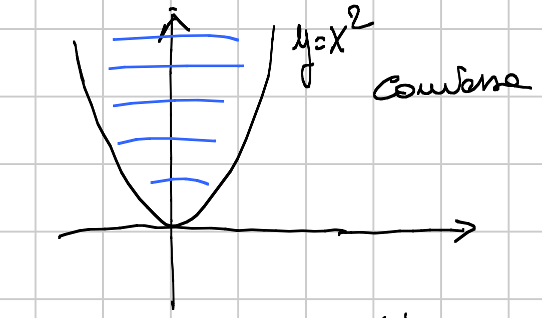
e quindi $\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to 0^+} \left(2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right) = 0 - \lim_{x \to 0^+} \cos \frac{1}{x}$

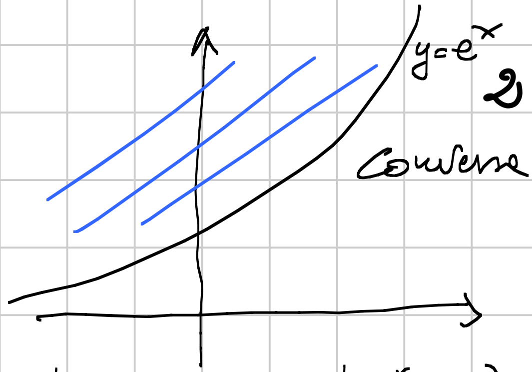
$$\underset{y = \frac{1}{x}}{=} -\lim_{y \to +\infty} \cos y \quad \nexists$$

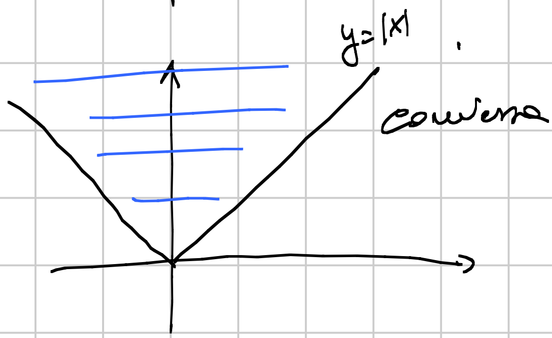
Mentre $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$

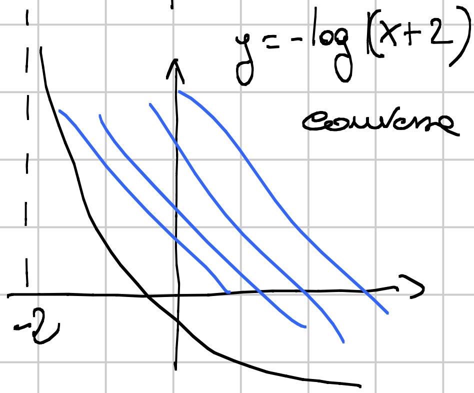
Come mai non vale l'Hôpital? Poiché $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{(x)'}$

Convessità









$f: I \to \mathbb{R}$ diciamo $epi(f) =$ epigrafico $= \{(x,y) : x \in I \ f(x) \leq y\}$

Def $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ questo si dice "convesso" se $\forall x,y \in \Omega$ il segmento che congiunge x e y è tutto contenuto in Ω

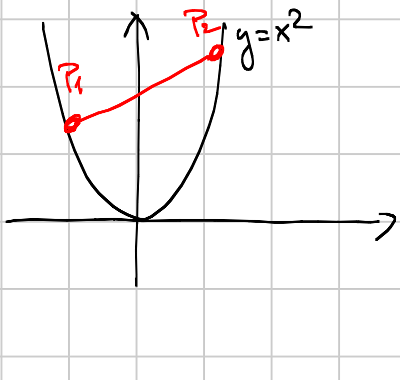
ovvero se $\forall x,y \in \Omega$ $\lambda x + (1-\lambda) y \in \Omega$ $\forall \lambda \in [0,1]$

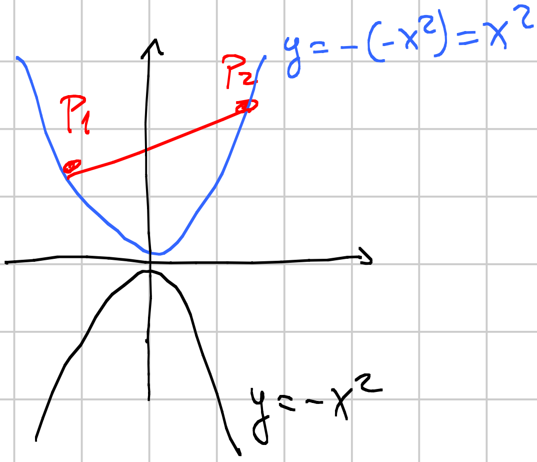
Def $f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo

"f convessa su I" se $epi(f) = \{(x,y) : x \in I \ f(x) \leq y\}$ è convesso

"f concava su I" se $-f$ è convessa su I

Oss: f è concava su I sse $\{(x,y) \ x \in I \ y \leq f(x)\}$ è convesso





Def (altra definizione di convessità)

Data $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, questa si dice "convessa su I" (strettamente)

se $\forall x, y \in I$ $\quad f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall \lambda \in [0,1]$ $\quad (<)$

f si dice (strettamente) "concava su I" se $-f$ è (strettamente) convessa su I

OSS: • La convessità è un concetto GLOBALE

• Esistono funzioni che non sono né convesse né concave

Esempio $f(x) = \operatorname{sen} x$ risulta essere

• strett. convessa su $[\pi, 2\pi]$ poiché $f''(x) > 0 \ \forall x \in]\pi, 2\pi[$

• strett. concava su $[0, \pi]$ poiché $f''(x) < 0 \ \forall x \in]0, \pi[$

• Né convessa né concava su $[0, 2\pi]$ (vedi il punto 1 e il punto 2)

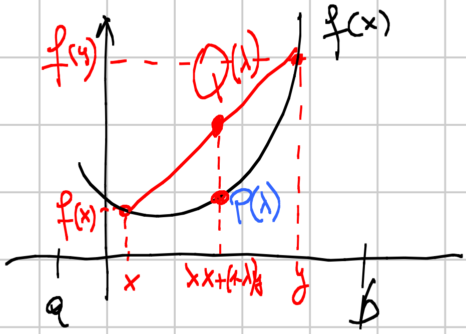
Pb Esistono funzioni simultaneamente convesse e concave (non strettamente)?

SÌ: Tutte le funzioni $f(x) = ax + b$ sono convesse e concave su tutto $\mathbb{R}$ (e quindi anche su un $\forall$ intervallo I)

(**Pb** Esistono f.ni simultaneamente debolmente crescenti e debolmente decrescenti su I intervallo?

SÌ: $f(x) = k$ costante è sia deb. crescente che deb. decrescente)

$\forall x, y \in I \quad f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall \lambda \in [0,1]$



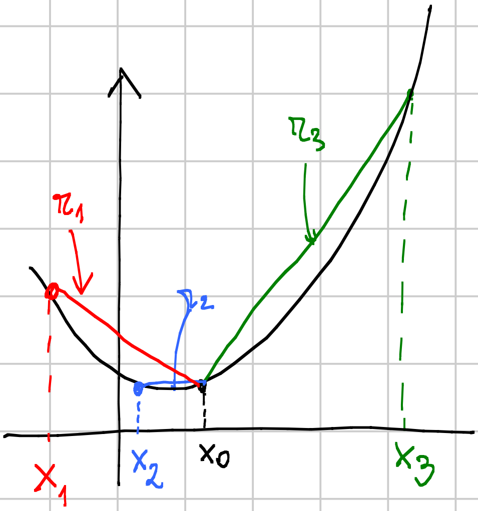
quando $\lambda \in [0,1]$ e $x < y$

$x \leq \lambda x + (1-\lambda) y \leq y$

$Q(\lambda) = (\lambda x + (1-\lambda) y \, ; \, \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$

$P(\lambda) = (\lambda x + (1-\lambda) y \, ; \, f(\lambda x + (1-\lambda) y))$

"Convessità di f su I" $\equiv$ ordinata di $Q(\lambda) \geq$ ordinata di $P(\lambda)$



$m_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ coeff. angolare di r_1

$m_2 = \dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$ coeff. angolare di r_2

$m_3 = \dfrac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}$ coeff. angolare di r_3

si ha che $m_1 \leq m_2 \leq m_3$

Dal disegno è evidente, ma la dim analitica è un poco faticosa (elementare, ma faticosa)

Si deduce che, posto $R_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$R_{x_0}(x)$ è crescente su $I \setminus \{x_0\}$ quando f convessa

Ho cercato di giustificare il Teorema

"f convessa su I allora $R_{x_0}(x)$ crescente su $I \setminus \{x_0\}$"
$\uparrow$ $\forall x_0 \in I$

Teorema (caratterizzazione delle f.ni convesse su un intervallo I)

Data $f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo, sono tra loro equiv.

i) f convessa (strettamente) su I

ii) $R_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ è (strettamente) crescente su $I \setminus \{x_0\}$ $\forall x_0 \in I$

N.B. Questo risultato non è stato provato a lezione ma riportiamo di seguito la dim per il lettore

Per la dimostrazione è utile il seguente

Teorema (def equivalenti di convessità) NON FATTA A LEZIONE

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Sono tra loro equivalenti, $\forall x, y \in I$ $x<y$,

1) $f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x) + t f(y) \quad \forall t \in]0,1[$

2) $f(w) \leq \frac{y-w}{y-x} f(x) + \frac{w-x}{y-x} f(y) \quad \forall w \in]x,y[$

ovvero

$$f(w) \leq f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \cdot (w-x) \quad \forall w \in]x,y[$$

Oss. fond. $\frac{y-w}{y-x} + \frac{w-x}{y-x} = 1 \Rightarrow w = \frac{y-w}{y-x} \cdot x + \frac{w-x}{y-x} y \quad \forall w \in]x,y[$

1) $\Rightarrow$ 2)

$$f(w) = f\left(\frac{y-w}{y-x} x + \frac{w-x}{y-x} \cdot y\right) \overset{\text{per la 1)}}{\leq} \frac{y-w}{y-x} f(x) + \frac{w-x}{y-x} \cdot f(y)$$

$$\leq \frac{(y-w)f(x) + (w-x)f(y) - x f(x) + x f(x)}{y-x}$$

$$= \frac{f(x)(y-x) + w(f(y)-f(x)) - x(f(y)-f(x))}{y-x}$$

$$= f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \cdot (w-x) \quad \forall w \in]x,y[$$

2) $\Rightarrow$ 1)

$w = (1-t)x + ty$

$$f((1-t)x+ty) = f(w) \leq f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x} ((1-t)x + ty - x)$$

uso la 2)

$$f((1-t)x+ty) \leq f(x) + t(f(y)-f(x)) = (1-t)f(x) + t f(y) \quad \forall t \in]0,1[$$

$\boxed{\text{Th}}$

Possiamo ora provare che (NON FATTA A LEZIONE)

TEOREMA (f convessa sse $R_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ è crescente) 6

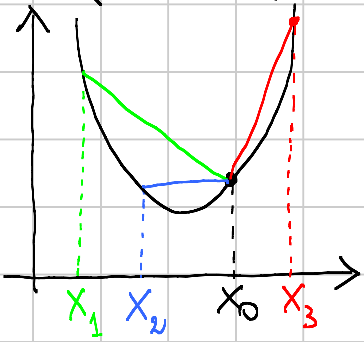
$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Sono tra loro equivalenti

1) f è (strettamente) convessa su I
2) $R_{x_0}(x)$ è (strettamente) crescente su $I \setminus \{x_0\}$ $\forall x_0 \in I$

dove $R_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

dim.

Graficamente il Teorema è ben osservabile



Proviamo che 1) $\Rightarrow$ 2)

Presi $x < y$ dobbiamo provare

$$\frac{R_{x_0}(y) - R_{x_0}(x)}{y-x} \geq 0$$

ovvero

$$\frac{f(y)-f(x_0)}{(y-x_0)(y-x)} - \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)(y-x)} = \frac{(x-x_0)(f(y)-f(x_0)) - (f(x)-f(x_0))(y-x_0)}{(y-x_0)(x-x_0)(y-x)}$$

$$= \frac{f(x_0)(y-x_0-x+x_0) + f(y)(x-x_0) - f(x)(y-x_0)}{(y-x_0)(x-x_0)(y-x)}$$

$$= \frac{f(x_0) + f(y)\frac{x-x_0}{y-x} - f(x)\frac{y-x_0}{y-x}}{(y-x_0)(x-x_0)} = \frac{f(x_0) + f(y)\frac{x-x_0}{y-x} + f(x)\frac{x_0-y}{y-x}}{(y-x_0)(x-x_0)}$$

Supponiamo che $x < x_0 < y$: allora

$$\frac{R_{x_0}(y) - R_{x_0}(x)}{y-x} = \frac{f(x_0) - f(y)\frac{x_0-x}{y-x} - f(x)\frac{y-x_0}{y-x}}{(y-x_0)(x-x_0)} \geq 0$$

Sfrutto l'equival. tra 1) e 2) nella osservazione precedente essendo f convessa

in quanto (Numeratore ≤ 0) e (Denominatore < 0)

Analogamente, se supponiamo che $x < y < x_0$

$$\frac{R_{x_0}(y)-R_{x_0}(x)}{y-x} = \frac{f(x_0)(y-\cancel{x_0}-x+\cancel{x_0}) + f(y)(x-x_0) - f(x)(y-x_0)}{(y-x_0)(x-x_0)(y-x)}$$

$$= \frac{f(y) - f(x_0)\frac{x-y}{x-x_0} - f(x)\frac{y-x_0}{x-x_0}}{(y-x_0)(y-x)} \geq 0$$

Anche qui sfrutto l'equivalenza tra 1) e 2) nella oss. precedente essendo f una funzione convessa

in quanto (Numeratore ≤ 0) e (Denominatore < 0)

Infine se $x_0 < x < y$

$$\frac{R_{x_0}(y) - R_{x_0}(x)}{y-x} = \frac{f(x_0)(y-x) + f(y)(x-x_0) - f(x)(y-x_0)}{(y-x_0)(x-x_0)(y-x)}$$

$$= \frac{-f(x) + f(y)\frac{x-x_0}{y-x_0} + f(x_0)\frac{y-x}{y-x_0}}{(x-x_0)(y-x)} \geq 0$$

f è convessa e per l'eq. tra 1) e 2) nella def precedente ho la tesi

(Numeratore ≥ 0)

(Denominatore < 0)

Il viceversa si ottiene ripercorrendo a ritroso la dim precedente $\boxed{\text{III}}$

Oss: questo risultato è interessante da un punto di vista teorico, ma poco pratico per individuare la convessità o meno di $f: I \to \mathbb{R}$

Teorema (convessa $\Rightarrow$ continua)

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo

f convessa su I allora f continua su $\mathring{I}$ (interno)

dim

Fisso $x_0 \in \mathring{I}$ e voglio provare $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (x_0 è p.d.a. per I)

Per il Teorema precedente $R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ è crescente su $I - \{x_0\}$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e sono

entrambi finiti, ovvero $\exists$ $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'_+(x_0) \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0}(x - x_0)}_{=0}$$

analog.

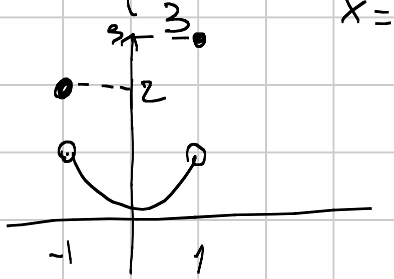
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'_-(x_0) \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0}(x - x_0)}_{=0}$$

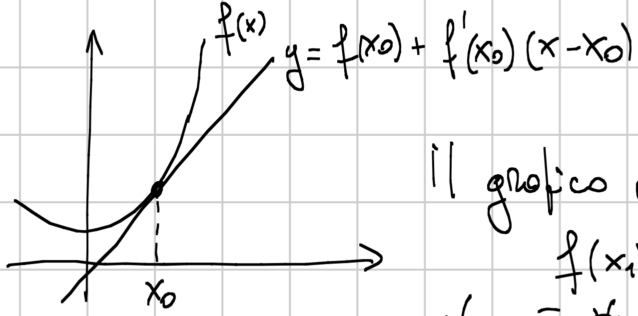
$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ ▨

Oss: non so se f continua negli estremi dell'intervallo infatti la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x = -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

è convessa ma non è continua in -1 e $+1$





il grafico suggerisce che

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$\forall x \in I \ \forall x_0 \in I$

Ovvero il grafico della retta separa $\mathbb{R}^2$ in due parti e il grafico di f sta tutto in una di queste 2 porzioni

Teorema (Grafico (f) convessa sta "sopra" la Tangente)

$f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile $\forall x \in I$. Sono equiv.

i) f convessa (strettamente) su I

ii) $\forall x_1, x_0 \in I \quad f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$

$\left(\forall x_1 \neq x_0 \in I \quad f(x_1) > f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \right)$

dim

Proviamo che i) $\Rightarrow$ ii). Utilizzo il risultato che dice $R_{x_0}(x)$ crescente su $I \setminus \{x_0\}$

Prendo x_1, x_0 e considero $R_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Sapendo che $R_{x_0}(x)$ è crescente, si ha che

$x_1 < x_0 \qquad R_{x_0}(x_1) \leq \lim_{x \to x_0^-} R_{x_0}(x) = f'(x_0)$

$x_1 < x_0 \qquad \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0)$

$\Downarrow$

$x_1 < x_0 \qquad f(x_1) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x_1 - x_0)$

$\Downarrow$

$x_1 < x_0 \qquad f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \leftarrow (a)$

analogamente

$x_1 > x_0$ $\qquad R_{x_0}(x_1) = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \geq \lim_{x\to x_0^-} R_{x_0}(x) = f'(x_0)$

$\Downarrow$

$x_1 > x_0$ $\qquad \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \geq f'(x_0)$

$\Downarrow$

$x_1 > x_0$ $\qquad f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1-x_0) \leftarrow (b)$

$(a)+(b)$ sono la $ii)$

$ii) \Rightarrow i)$ NON FATTO A LEZIONE

Fissati $x<y$, proviamo che $\forall \omega \in]x,y[$

$$f(\omega) \leq \frac{\omega-y}{x-y} f(x) + \frac{x-\omega}{x-y} f(y)$$

Per la ii)

Preso $\omega \in]x,y[$ $\qquad f(x) \geq f(\omega) + f'(\omega)(x-\omega)$

$\qquad f(y) \geq f(\omega) + f'(\omega)(y-\omega)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)-f(\omega) \geq f'(\omega)(x-\omega) \\ f(y)-f(\omega) \geq f'(\omega)(y-\omega) \end{cases} \Rightarrow \frac{f(x)-f(\omega)}{x-\omega} \leq f'(\omega) \leq \frac{f(y)-f(\omega)}{y-\omega}$$

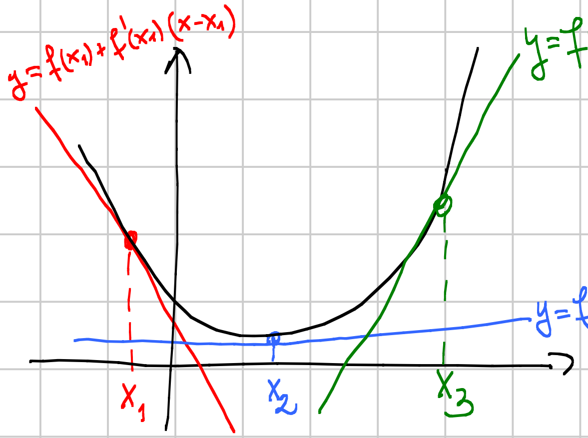
$$\Rightarrow \frac{f(x)(y-\omega)-f(\omega)(y-\omega)-f(y)(x-\omega)+f(\omega)(x-\omega)}{(x-\omega)(y-\omega)} \leq 0$$

$$\Rightarrow f(\omega)(x-y) - f(x)(\omega-y) - f(y)(x-\omega) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(\omega) - f(x)\frac{\omega-y}{x-y} - f(y)\frac{x-\omega}{x-y} \leq 0 \qquad \forall \omega \in]x,y[$$

$$\Rightarrow f(\omega) \leq \frac{\omega-y}{x-y} f(x) + \frac{x-\omega}{x-y} f(y) \qquad \forall \omega \in]x,y[$$

e quest'ultima è la disug. di convessità equiv. $\blacksquare$



$f'(x_1) \leq f'(x_2) \leq f'(x_3)$

Teorema (f convessa $\iff f'$ crescente)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile $\forall x \in I$

sono equivalenti

1) f convessa (strettamente) su I

2) f' crescente (strettamente) su I

dim (NON FATTA A LEZIONE)

1) $\Rightarrow$ 2) Fissati $x, y \in I$ $x<y$ devo provare $f'(x) \leq f'(y)$

Per il Teorema precedente

$$\begin{cases} f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y) \\ f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)-f(y) \geq f'(y)(x-y) \\ f(y)-f(x) \geq f'(x)(y-x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'(y)$$

2) $\Rightarrow$ 1) Fisso $x, y \in I$: voglio provare che

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y) \quad \text{e} \quad f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$$

non è restrittivo

$x<y$ Considero $f: [x,y] \to \mathbb{R}$, che soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange per cui

$$\exists\, \omega \in \,]x,y[\, : \quad f'(\omega) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Essendo f' debolmente crescente

$$f'(x) \leq f'(\omega) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y)$$

$\Rightarrow f(y) - f(x) \geq f'(x)(y-x)$ e $f(y) - f(x) \leq f'(y)(y-x)$

$\Rightarrow f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$ e $f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)$

e la tesi segue dal Teorema precedente ◻

Oss: Dato che $f''(x) > 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f'(x)$ strett. crescente in I

Teorema (f convessa se $f'' \geq 0$)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f 2 volte derivabile

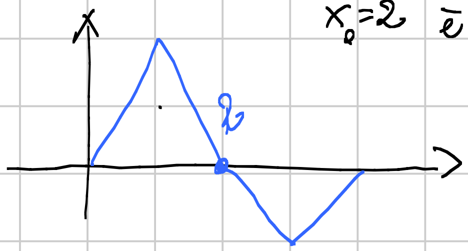
Sono tra loro equiv

i) f convessa su I

ii) $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I$

Def Data $f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo, un punto $x_0 \in I$ si dice "punto di flesso per f" se la funzione cambia da convessa a concava (o viceversa) nel punto x_0

Esempio



$x_0 = 2$ è punto di flesso per

$$f: \begin{cases} 2x & 0 \le x < 1 \\ 4-2x & 1 \le x < 2 \\ 2-x & 2 \le x < 3 \\ 4+x & 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

Si osservi che $x=2$ non è un punto ove $f''(x)$ si annulla, in quanto la funzione NON è derivabile su $[0,4]$

Oss Quando f derivabile 2 volte allora i flessi possibili sono le radici dell'eq. $f''(x) = 0$

Pb Dato x^* t.c. $f''(x^*) = 0 \implies x^*$ è punto di flesso ?

NO! si prende $f(x) = x^4$: si ha che

$f'(x) = 4x^3 \qquad f''(x) = 12x^2$

e dunque $f''(0) = 0$ Però

$f'(x) = 4x^3$ risulta essere crescente strett. su tutto $\mathbb{R}$

$\implies f(x)$ è strett. convessa su $\mathbb{R}$

$\implies x = 0$ non è un flesso!

Abbiamo provato $f''(x^*) = 0 \not\Rightarrow x^*$ p.to di flesso