2014-12-02 - lezione 39

Giorno Recupero	10.30 ÷ 12.30	14.30 ÷ 16.30
Venerdì 5/12	Aula G	Aula P
Venerdì 12/12	Aula P	Aula P

Teorema (Rolle)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f \text{ continua } \forall x \in [a,b] \\ 2)\ f \text{ derivabile } \forall x \in]a,b[\\ 3)\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists z \in]a,b[\ f'(z) = 0$$

Teorema (Lagrange)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f \text{ continua } \forall x \in [a,b] \\ 2)\ f \text{ derivabile } \forall x \in]a,b[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists z \in]a,b[: f'(z) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Teorema (Cauchy)

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

1) f, g continue su $[a,b]$
2) " derivabili su $]a,b[$

a) Allora $\exists z \in]a,b[: \quad f'(z)\left(g(b)-g(a)\right) = g'(z)\left(f(b)-f(a)\right) \quad (*)$

b) se $g'(z) \neq 0\ \forall z \in]a,b[$ allora $\exists z \in]a,b[: \dfrac{f'(z)}{g'(z)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

OSS: Dal Teorema di Cauchy ottengo il Teorema di Lagrange prendendo $g(x) = x$

dim

Ci si riconduce al Teorema di Rolle. La tesi è

$(*)\quad f'(z)\left(g(b)-g(a)\right) - g'(z)\left(f(b)-f(a)\right) = 0$

e questa è la derivata di $h(x) = f(x)\left(g(b)-g(a)\right) - g(x)\left(f(b)-f(a)\right)$ nel punto z eguagliata a zero.

Verifico che $h(x)$ soddisfa le ipotesi di Rolle

1) h è continua su $[a,b]$? Vero, è differenza di funzioni continue su $[a,b]$

2) h " derivabile su $]a,b[$? Vero, è differenza di funzioni derivabili su $]a,b[$

3) $h(a) = f(a)(g(b)-\cancel{g(a)}) - g(a)(f(b)-\cancel{f(a)}) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$ sono $=$
$h(b) = f(b)(\cancel{g(b)}-g(a)) - g(b)(\cancel{f(b)}-f(a)) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$

$\Rightarrow$ (Rolle) $\exists z \in]a,b[: h'(z) = f'(z)(g(b)-g(a)) - g'(z)(f(b)-f(a)) = 0$

che è la Tesi!

b) Segue dal fatto che $g'(z) \neq 0$ e quindi posso dividere!

CVD

Oss: l'ipotesi $g'(z) \neq 0 \ \forall z \in]a,b[$

Questa ipotesi si traduce in

$g'(z) > 0 \ \forall z \in]a,b[\Rightarrow g(z)$ strettamente crescente

$\Rightarrow g(a) < g(b) \Rightarrow g(b) - g(a) \neq 0$

oppure

$g'(z) < 0 \ \forall z \in]a,b[\Rightarrow g(z)$ strettamente decrescente

$\Rightarrow g(a) > g(b) \Rightarrow g(b) - g(a) \neq 0$

In entrambi i casi posso dividere per $g'(z)$ e per $g(b) - g(a)$

Nota $h(x) = \arctg \frac{1}{x} = (\ell \circ m)(x)$

dove $\ell(z) = \arctg z \qquad m(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$\ell'(z) = \frac{1}{1+z^2} \qquad m'(x) = -\frac{1}{x^2}$

e dunque $h'(x) = \ell'(m(x)) \cdot m'(x)$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Esercizio Provare che

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x>0 \\ -\frac{\pi}{2} & x<0 \end{cases}$$

dim

Ricordo che se $f'(x)=0$ $\forall x \in I$ intervallo allora $f(x)=\text{cost.}$ $\forall x \in I$

Nel nostro caso $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ e si ha che

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{x^2+1} \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$

$\forall x \neq 0 \Rightarrow$ (x corollario Teorema Lagrange)

$\forall x>0$ $f(x) = \text{cost} = f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2}$

$\forall x<0$ $f(x) = \text{cost} = f(-1) = \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{2}$ ▥

Oss Si è visto che x_0 max/min locale interno, f derivabile in x_0 allora $f'(x_0)=0$ (Fermat Lemma)

il viceversa non è vero:

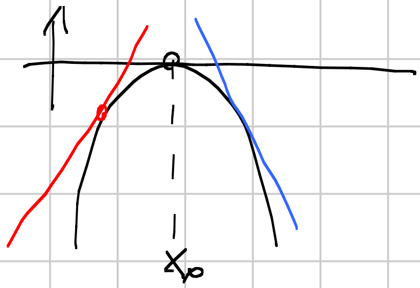
$f(x)=x^3$ è derivabile in $x=0$ con $f'(0)=0$

però $x=0$ non è max/min locale interno

Def Data $f: I \to \mathbb{R}$, x_0 punto interno di I dico che "x_0 punto stazionario per f su I" se $\exists\, f'(x_0) = 0$

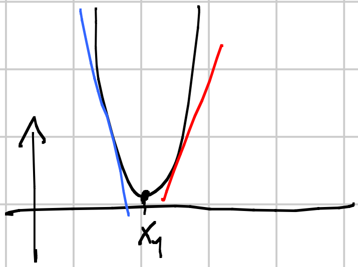
Oss

Punto stazionario $\equiv$ punto a Tg orizzontale



x_0 p.to di max relativo interno

$$\exists \delta > 0 \quad f'(x) \begin{cases} > 0 & x_0 - \delta < x < x_0 \\ < 0 & x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$$



x_1 punto di min relativo interno

$$\exists \delta > 0 \quad f'(x) \begin{cases} < 0 & x_1 - \delta < x < x_1 \\ > 0 & x_1 < x < x_1 + \delta \end{cases}$$

Teorema (caratterizzazione punti stazionari)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile in I, x_0 punto stazionario per f (ovvero $f'(x_0) = 0$)

1) $\exists \delta > 0$: $f'(x) \begin{cases} < 0 & x_0 - \delta < x < x_0 \\ > 0 & x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases} \Rightarrow x_0$ minimo relativo interno

2) $\exists \delta > 0$: $f'(x) \begin{cases} > 0 & x_0 - \delta < x < x_0 \\ < 0 & x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases} \Rightarrow x_0$ max relativo interno

3) $\exists \delta > 0$: $f'(x)$ non cambia segno in $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$ $\Rightarrow$ x_0 non è né minimo né max

Esercizio

Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di ~~soluzioni~~ soluzioni reali di

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 = k$$

dim

Si procede tracciando il grafico approssimativo di f e intersecando con $y = k$

Il dominio (o campo esistenza) massimale è $\mathbb{R}$, in quanto f è un polinomio

I limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right) = +\infty\cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right) = -\infty\cdot 1 = -\infty$$

$$f'(x) = 3x^2-6x = 0 \iff 3x(x-2)=0 \iff \begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=2 \end{matrix}$$

ho trovato 2 punti stazionari

Per studiare la natura dei punti x_1 e x_2 debbo studiare la monotonia di f, ovvero studiare il segno di f'

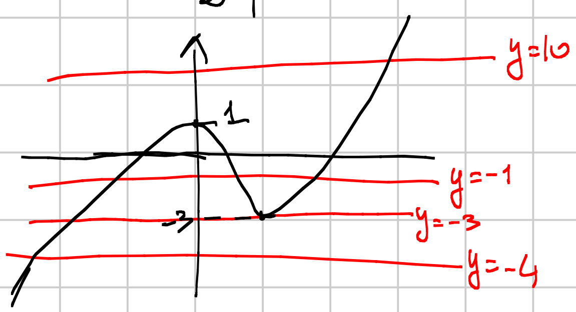
$$f' \begin{cases} >0 & x<0 \text{ o } 2<x \\ <0 & 0<x<2 \end{cases}$$

$0=x_1$ è tale che $\exists\delta>0$ $f'(x) \begin{cases} >0 & x_1-\delta<x<x_1 \\ <0 & x_1<x<x_1+\delta \end{cases}$

$\Rightarrow$ x_1 p.to di max relativo interno $f(x_1)=f(0)=1$

$2=x_2$ è t.c. $\exists\delta>0$ $f'(x) = \begin{cases} <0 & x_2-\delta<x<x_2 \\ >0 & x_2<x<x_2+\delta \end{cases}$

$\Rightarrow$ x_2 p.to di min relativo interno $f(x_2)=f(2)=8-12+1=-3$

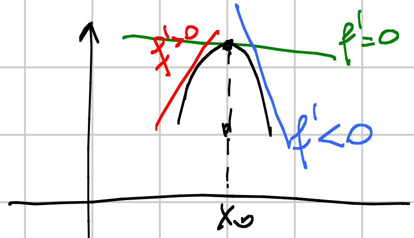


$k>1$	$f(x)=k$	1 sol. reale
$k=1$	"	2 " "
$-3<k<1$	"	3 " "
$k=-3$	"	2 " "
$k<-3$	"	1 " "

Oss: data $f: I \to \mathbb{R}$ x_0 p.to interno a I

$$\underbrace{\begin{matrix} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{matrix}} \Rightarrow \left.\underbrace{\begin{matrix} f'(x_0)=0 \\ f'(x) \text{ è decrescente in }]x_0-\delta, x_0+\delta[\end{matrix}}\right\} \Rightarrow$$

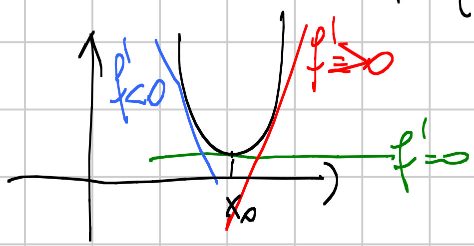
$$\Rightarrow \exists\delta>0 : f' \begin{cases} >0 & x_0-\delta<x<x_0 \\ <0 & x_0<x<x_0+\delta \end{cases}$$



viceversa

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(x_0)=0 \\ \exists\delta>0 : f'(x) \text{ crescente in }]x_0-\delta, x_0+\delta[\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\delta>0 : f' \begin{cases} <0 & x_0-\delta<x<x_0 \\ >0 & x_0<x<x_0+\delta \end{cases}$$

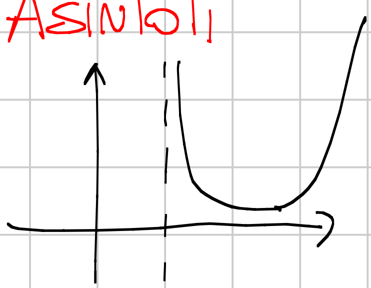


Teorema (caratterizzazione max/min)

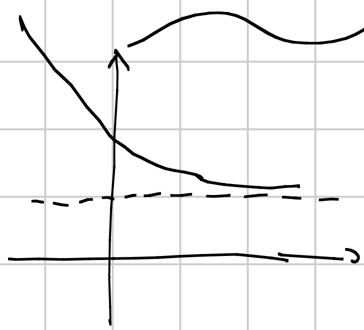
$f: I\to\mathbb{R}$, x_0 punto interno a I, x_0 stazionario per f (ovvero $f'(x_0)=0$)
f derivabile in I
$\exists f''(x_0)$

1) $f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ p.to minimo relativo interno
2) $f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ " massimo " "

ASINTOTI



asintoto orizzontale : a=0



Def Data $f: I\to\mathbb{R}$, una retta di equazione

1) $x=a$ si dice "asintoto verticale" se

$$\left(\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty\right) \quad \text{o} \quad \left(\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty\right)$$

2) $y=ax+b$ si dice "asintoto obliquo" per $x\to+\infty$ $(-\infty)$

se $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b)=0$ $\quad \left(\lim_{x\to-\infty}\right)$

Esempio $f(x) = \log x$ ha $x = 0$ come asintoto verticale poiché

$$\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$$

Esempio $f(x) = 1/x$ ha $x = 0$ come asintoto verticale poiché

$$\lim_{x \to 0^+} 1/x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} 1/x = -\infty$$

Esempio $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+2}$ ha $y = 1$ come asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$ infatti

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$$

asintoto orizzontale è un particolare asintoto obliquo con $a = 0$!!

Esempio $f(x) = x + \dfrac{3x}{x+1}$ ha $y = x + 3$ come asintoto obliquo infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - x - 3 \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x}{x+1} - 3 \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{3x} - \cancel{3x} - 3}{x+1} = 0$$

Pb: Come individuare l'equazione di un asintoto obliquo?

Se è orizzontale mi basta calcolare il $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ (o $\lim_{x \to -\infty} f(x)$)

Se non è orizzontale osservo che

Se $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ allora $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$!

$\Downarrow$

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) = 0$$

Se $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax-b\right)=0$ allora $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=b$!

Ragionamento

Se $y=ax+b$ è asintoto obliquo per f quando $x\to+\infty$ allora

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=b\in\mathbb{R} \qquad !!$$

Esempio $f(x)=2x+\dfrac{3x^2}{2x^2+1}$ determiniamo l'asintoto obliquo per $x\to+\infty$

dim

Inizio con il calcolo di $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\frac{3x^2}{2x^2+1}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{2\cancel{x}^{1}}{\cancel{x^2}_{1}}\cdot\frac{1}{2+1/x^2}\right)=2+0^+\cdot\frac{1}{2+0^+}=2=a$$

Calcolo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{2x}+\frac{3x^2}{2x^2+1}-\cancel{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3\cancel{x^2}^{1}}{\cancel{x^2}_{1}}\cdot\frac{1}{2+1/x^2}\right)$$

$$=\frac{3}{2+0^+}=\frac{3}{2}$$ dunque $y=2x+\frac{3}{2}$ è asintoto obliquo per f quando $x\to+\infty$

Attenzione $f(x)=x+\log x$ non ha asintoti obliqui

però

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\log x}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\log x=+\infty\notin\mathbb{R}$$

Teorema (dell'Hôpital) $\left(\frac{0}{0}\right)$

$f, g:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabili su $]a,b[$ e tali che

1) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$

2) $g'(z) \neq 0 \quad \forall z \in]a,b[$

3) $\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

dim

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases} \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}$$

$z \in]a,x[$, ovvero $z \neq a$

$$\forall x \in]a,b[\quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{g}'(z)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

$\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ soddisfano le hp. del teorema di Cauchy, dunque $\exists z : a < z < x$ t.c.

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z\to a^+} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \ell$$

per ipotesi

$$\Rightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

$\blacksquare$

Teorema (dell'Hôpital) $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$f, g:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabili su $]a,b[$ e tali che

1) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$

2) $g'(z) \neq 0 \quad \forall z \in]a,b[$

3) $\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Esempio Calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}$

due

$f(0)=0=g(0)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1-x}{3x^2}$$

questa uguaglianza è vincolata all'esistenza del limite di $\frac{f'}{g'}$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{6} \quad \boxed{W}$$

anche qui è vero sotto le condizioni che esista $\lim \frac{f''}{g''}$

Attenzione: non applicare l'Hôpital nelle forme che non sono indeterminate

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x} \overset{\text{Non si può}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{1} = 0$$

$$\frac{\cos x}{x} \to \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Non si può applicare!!