2014-12-01 - lezione 38   lunedì 14.30-16.30   1

Oss: $\{a_n\}_n$ successione reale

$a_{\bar{n}} \leq a_n \ \forall n > \bar{n}$ sse $a_n \leq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

dire

$\Rightarrow$ Immediata: preso $n = \bar{n}+1$ si ha $\forall n \ a_{n+1} \geq a_n$

$\Leftarrow$ Ipotesi $\forall n \in \mathbb{N} \ a_{n+1} \geq a_n$ $(*)$

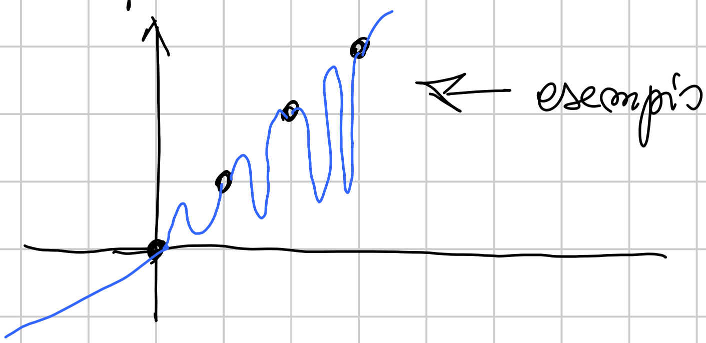
Ts $a_{\bar{n}} \leq a_n \ \forall n > \bar{n}$

$$a_{\bar{n}} \underset{\text{uso }(*)}{\leq} a_{\bar{n}+1} \underset{\text{uso }(*)}{\leq} a_{\bar{n}+2} \underset{\text{uso }(*)}{\leq} a_{\bar{n}+3} \underset{\text{uso }(*)}{\leq} \cdots \underset{\text{uso }(*)}{\leq} a_n$$

e dunque la Tesi $\blacksquare$

Oss: Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $f(n) \leq f(n+1) \ \forall n$

questa non è detto sia crescente!!



$\leftarrow$ esempio

Oss: la derivata seconda di $f(x)$, posto che esista, altro non è che la derivata della derivata prima

ovvero

$$f''(x) = (f')'(x) = D^2 f(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$

$$f'''(x) = (f'')'(x) = D^3(f)(x) = \frac{d^3 f}{dx^3}(x)$$

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x) = D^n f(x) = \underbrace{\frac{d^n f}{dx^n}(x)}_{\text{Leibniz}}$$

Notazione di Leibniz

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f}{\Delta x_0}=\frac{df}{dx}(x_0)$$

$y=f(x)$ consideriamo $F(x)=(g\circ f)(x)$

$z=g(y)$

$$\frac{dF}{dx}(x_0)=\frac{d\,g\circ f}{dx}(x_0)=\frac{d\,g\circ f}{df}\cdot\frac{df}{dx}(x_0)$$

$$=\frac{dg}{dy}(f(x_0))\cdot\frac{df}{dx}(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

$$\frac{d\,h\circ g\circ f}{dx}=\frac{d\,h\circ g\circ f}{d\,g\circ f}\cdot\frac{d\,g\circ f}{df}\cdot\frac{df}{dx}=\frac{dh}{dz}(g\circ f)\cdot\frac{dg}{dy}(f)\cdot\frac{df}{dx}$$

MONOTONIA e Segno di f'

Def Data $f: I\to\mathbb{R}$

f si dice strettamente crescente se $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}>0$ $\forall x,y\in I$, $x\neq y$

f " " " decrescente se $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}<0$ "

f si dice debolmente crescente se $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\geq 0$ $\forall x,y\in I$, $x\neq y$

f " " " decrescente se $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq 0$ "

Oss f strettamente crescente su A $\Rightarrow \left[\forall x,y\in A\ \ x<y\Rightarrow f(x)<f(y)\right]$

$\Rightarrow \forall x,y\in A\ \{[x<y\Rightarrow f(x)<f(y)]\ \&\ [x>y\Rightarrow f(x)>f(y)]\}$

$\Rightarrow \forall x,y\in A,\ x\neq y\quad \frac{f(x)-f(y)}{x-y}>0$

Viceversa $\forall x, y \in A \ x \neq y \quad \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x, y \in A \ [x > y \Rightarrow f(x) > f(y)]$ e $[x < y \Rightarrow f(x) < f(y)]$

$\Rightarrow$ f crescente in A

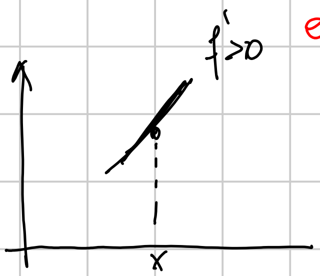
Teorema ($f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ f cresce in un intorno di x_0)

$f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ p.d.a. per I, f derivabile in x_0

$$f'(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in A \begin{cases} f(x) < f(x_0) & x_0 - \delta < x < x_0 \\ f(x_0) < f(x) & x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$$

$$f'(x_0) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \begin{cases} f(x) > f(x_0) & x_0 - \delta < x < x_0 \\ f(x_0) > f(x) & x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$$

dim



$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$ per ipotesi

$\Downarrow$ Teorema permanenza segno

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall x \in \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[\cap A \setminus \{x_0\}$$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 :$ f(x) è crescente strettamente in

$$\left(\left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[\setminus \{x_0\}\right) \cap A$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \begin{cases} f(x) < f(x_0) & \forall x \in A \quad x_0 - \delta < x < x_0 \\ f(x_0) < f(x) & \quad '' \quad x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$$

Il caso $f'(x_0) < 0$ è perfettamente analogo $\boxed{///}$

Pb: $f: A \to \mathbb{R}$, f strettamente crescente in A, f derivabile in A, preso $x_0 \in A \overset{?}{\Rightarrow} f'(x_0) > 0$???

NO!!

Infatti, presa $f(x) = x^3$, si ha che $f'(x) = 3x^2$

$f = x^3$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$

però

$f'(0) = 0$!!!!

Vale una inversione del Teorema solo parziale

Teorema (quasi un viceversa del precedente)

$f: A \to \mathbb{R}$, f strettamente crescente su A, $x_0 \in A$ p.d.a. per A

f derivabile in x_0

Allora $f'(x_0) \geq 0$

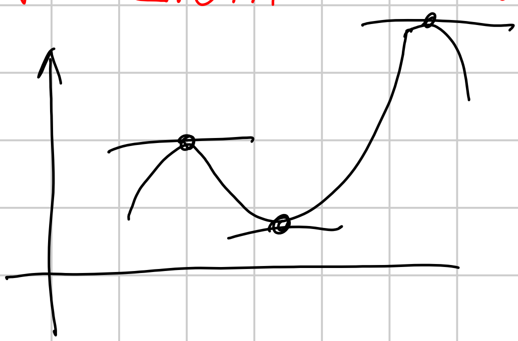
dim

Per ipotesi $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall x \in A$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

■

FUNZIONI DERIVABILI SU INTERVALLI



individuare i punti di max/min sfruttando il fatto che la tg in questi punti è // asse x

Def (massimo/minimo locale interno)

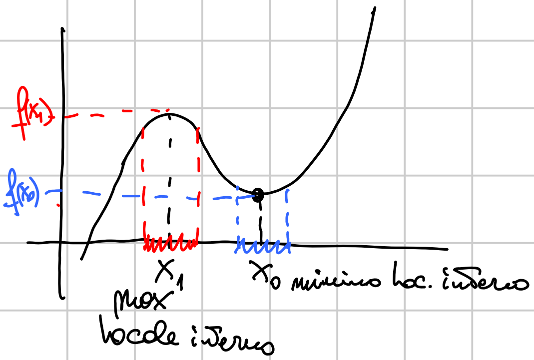
$f: A \to \mathbb{R}$,

$x_0 \in A$ è punto di massimo locale interno se $\exists\,]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq A$

$$\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\qquad f(x) \leq f(x_0)$$

$x_0 \in A$ è punto di minimo locale interno se $\exists\,]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq A$

$$\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\qquad f(x) \geq f(x_0)$$



Lemma (di Fermat)

$f: A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di max (min) locale interno per f su A, f derivabile nel punto x_0

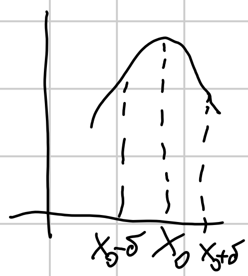
Allora $f'(x_0) = 0$

dim

x_0 punto di max locale interno per f su A (se min, si lavora su $-f$)

$\exists \delta > 0 : \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq A \qquad f(x) \leq f(x_0)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \begin{cases} \left[\frac{(-)}{(-)}\right] > 0 & x_0-\delta < x < x_0 \\ \left[\frac{-}{+}\right] < 0 & x_0 \leq x < x_0+\delta \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0) \geq 0$$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0) \leq 0$$

ricordo f derivabile in $x_0 \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$ ▨

Teorema (di Rolle)

$$\left.\begin{array}{l} f : [a,b] \to \mathbb{R} \\ 1)\ f \text{ continua } \forall x \in [a,b] \\ 2)\ f \text{ derivabile } \forall x \in]a,b[\\ 3)\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \exists z \in]a,b[\text{ t.c.} \\ f'(z) = 0 \end{array}$$

dim

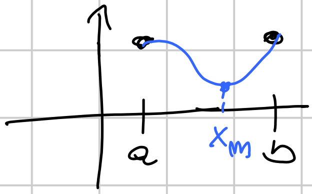
1) f continua $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \exists x_m, x_M \in [a,b]$ t.c.
$\min f([a,b]) = f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) = \max f([a,b])$ $\forall x \in]a,b[$
(per il Teorema di Weierstrass)

2) $x_m, x_M \in \{a,b\}$ (ovvero cadono negli estremi di $[a,b]$)
essendo $f(a) = f(b) \Rightarrow f(x_m) = f(x_M)$

$\Rightarrow f(x) = f(x_m) = f(x_M)$ costante su $[a,b]$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a,b[$ e quindi lo $\exists$
(ho trovato ∞ punti in cui $f' = 0$!)

3) $x_m \in]a,b[$ o $x_M \in]a,b[$
supponiamo $x_m \in]a,b[$
ed essendo



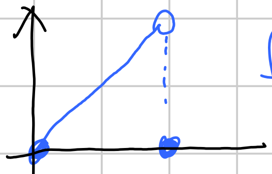
$f(x_m) \le f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow x_m$ è punto di minimo locale interno
f derivabile in x_m

$\Rightarrow f'(x_m) = 0$ (per il Lemma di Fermat) ▨

Controesempio 1

f derivabile su $]0,2[$, $f(0)=f(2)$ $\not\Rightarrow$ $\exists z\in]0,2[: f'(z)=0$

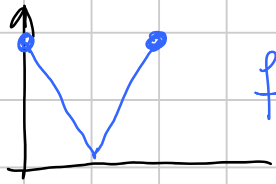


$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<2 \\ 0 & x=2 \end{cases}$ non è continua in $x=2$!

si ha che $f'(x)=1$ $\forall x\in]0,2[$

Controesempio 2

f continua su $[0,2]$, $f(0)=f(2)$ $\not\Rightarrow$ $\exists z\in]0,2[$ $f'(z)=0$



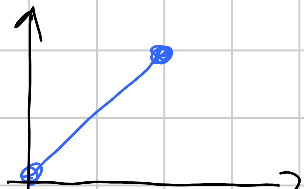
$f(x)=2|x-1|$ non è derivabile in $x=1$

si ha che $f'(x)=-1$ se $x\in]0,1[$, $f'(x)=1$ se $x\in]1,2[$

$f'\neq 0$!!!

Controesempio 3

f continua su $[0,2]$, " derivabile su $]0,2[$ $\not\Rightarrow$ $\exists z\in]0,2[: f'(z)=0$

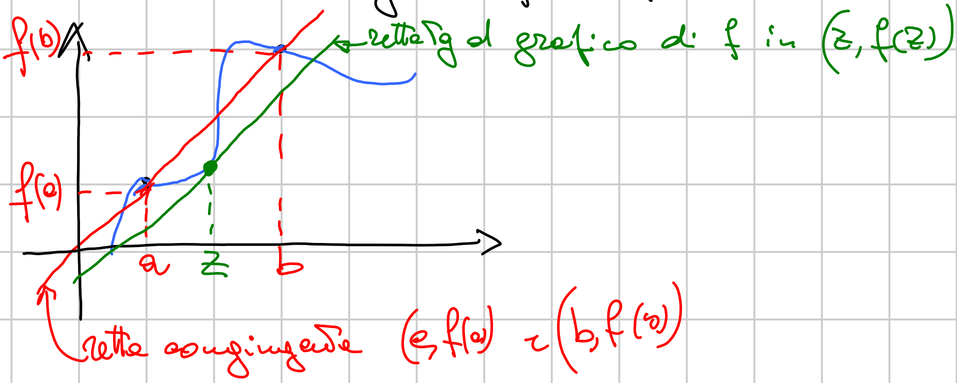


$f(x)=x$ questa non soddisfa $f(0)=f(2)$

e si ha che $f'(x)=1$ $\forall x\in]0,2[$

dunque $f'\neq 0$

Pb: Come posso dire se nelle ipotesi del Thm di Rolle "tolgo" $f(a)=f(b)$?



"Sempre" che $\exists\, z \in]a,b[$ t.c.

$f'(z)$ = coeff angolare della retta per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

$= \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Teorema (di Lagrange)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

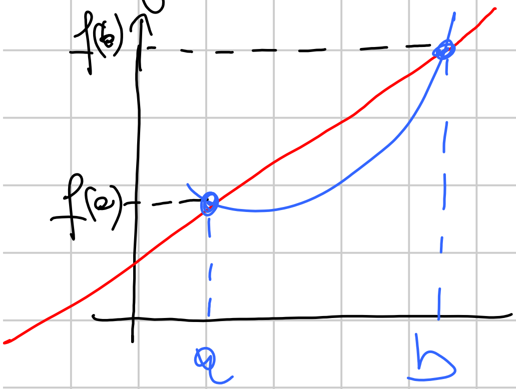
1) f continua in $[a,b]$

2) f derivabile in $]a,b[$

$\Rightarrow \exists\, z \in]a,b[: f'(z) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

dim

Voglio ricondurmi al Teorema di Rolle



$$r(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Introduco la funzione ausiliaria

$$h(x) = f(x) - r(x)$$

$h : [a,b] \to \mathbb{R}$

i) $h(x)$ è continua $\forall x \in [a,b]$? Vero: è differenza di funzioni continue in $[a,b]$

ii) $h(x)$ è derivabile $\forall x \in]a,b[$? Vero: è differenza di f.ni derivabili in $]a,b[$

iii) $h(a) = 0 = h(b)$ per costruzione

$\Rightarrow$ (per il Teorema Rolle) esiste $z \in]a,b[: h'(z) = 0$

ma $h'(z) = f'(z) - r'(z) = f'(z) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

$\Rightarrow \exists\, z \in]a,b[: f'(z) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ▨

Corollario ($f'(x)=0 \Rightarrow f(x)$ è costante)

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo
f derivabile $\forall x \in I$
$f'(x)=0 \ \forall x \in I \Rightarrow f(x)=c\in\mathbb{R} \ \forall x \in I$

dim

Ts $\forall x,y \in I$ $f(x)=f(y)$
Ho infatti, presi $x<y \in I$ si ha che
$f: [x,y] \to \mathbb{R}$
continua $\forall w \in [x,y]$
derivabile $\forall w \in]x,y[$

$\Rightarrow$ (Lagrange) $\exists z \in]x,y[: f'(z) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

ma $f'(z)=0$ per ipotesi
$\Rightarrow f(y)=f(x)$ ∎

Corollario 2 ($f'>0 \Rightarrow f\uparrow$; $f'<0 \Rightarrow f\downarrow$)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile $\forall x \in I$
$f'(x)>0$ (<0) $\forall x \in I$
Allora f è strettamente crescente (decrescente) su I

dim suppongo $f'>0$

Ts $\forall x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$
Ho infatti, presi $x<y \in I$ si ha che
$f: [x,y] \to \mathbb{R}$
continua $\forall w \in [x,y]$
derivabile $\forall w \in]x,y[$

$\Rightarrow$ (Lagrange) $\exists z \in]x,y[: \overbrace{f'(z)}^{\stackrel{0}{\wedge} \text{ per ipotesi}} = \dfrac{f(y)-f(x)}{\underbrace{y-x}_{\stackrel{\vee}{0} \text{ per costruzione}}}$

ma $f'(z)>0$ per ipotesi
$\Rightarrow f(y)>f(x)$ che è la tesi ∎ ∎