Tutto ciò che avreste voluto sapere sulle funzioni inverse (e non avete mai osato chiedere)

Def Data $f : I \to f(I)$ I intervallo invertibile, la funzione $g : f(I) \to I$ t.c.

$(f \circ g)(x) = x \quad \forall x \in f(I)$

$(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in I$

è detta funzione inversa e la si indica con f^{-1}

cioè $f^{-1}(x) = g(x) \quad \forall x \in f(I)$

Teorema

$f : I \to f(I)$ f strettamente crescente (decrescente)

allora $\exists f^{-1} : f(I) \to I$ funzione inversa strettamente crescente (decrescente)

dim

$f \uparrow \Rightarrow f$ è iniettiva

inoltre $f : I \to f(I) \Rightarrow f$ è suriettiva per definizione

$\Rightarrow f$ invertibile $\Rightarrow \exists f^{-1} : f(I) \to I$

Essendo $f \uparrow \Rightarrow [x < y \Rightarrow f(x) < f(y)]$

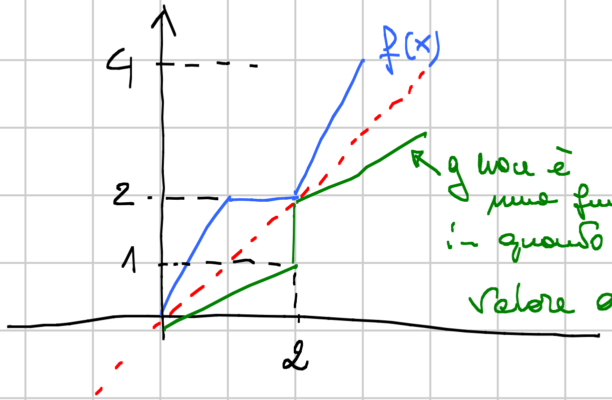
$\Rightarrow [f(x) < f(y) \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = x < y = f^{-1}(f(y))]$

$\Rightarrow [u < w \Rightarrow f^{-1}(u) < f^{-1}(w)]$

$\Rightarrow f^{-1}$ è $\uparrow$ ∎

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < 1 \\ 2 & 1 \le x < 2 \\ 2x-2 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$



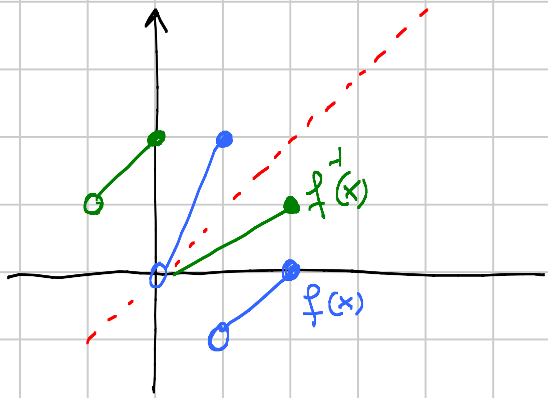
$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 \le x \le 2 \\ ]1,2[& x = 2 \\ \frac{x}{2}+1 & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

g non è una funzione in quanto non so che valore dare a $g(2)$!!!

La f.ne di partenza <u>non</u> <u>è</u> strett. crescente

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x \le 1 \\ x-2 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$



Sono partito da una funzione crescente strettamente

$\Downarrow$

f^{-1} è ben definita e decrescente

Sono partito da $f(x)$ discontinua in $x=1$
e sono giunto a $f^{-1}(x)$ " $x=0$

Problema: $f: I \to f(I)$ strett. crescente (decrescente) e continua

$\Rightarrow \exists\, f^{-1}(x)$ $\quad f^{-1}: f(I) \to I$ continua ??

SÌ, infatti vale il seguente risultato

Teorema (1° passo)

$f: I \to f(I)$ I intervallo sono tra loro equivalenti

i) f invertibile

ii) f strettamente crescente

dire

Abbiamo già provato che ii) ⇒ i)
(e non serve la continuità !!!)

$$x \neq y \Rightarrow \begin{matrix} x<y \\ o \\ x>y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(x)<f(y) \\ o \\ f(x)>f(y) \end{matrix} \Rightarrow f(x)\neq f(y)$$

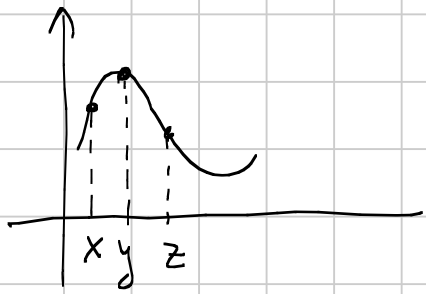
e questa è l'iniettività.

Vediamo che i) ⇒ ii)

Dobbiamo provare che

$f: I \to f(I)$ intervallo
f continua $\Rightarrow f$ strettamente crescente (decrescente)
$\exists f^{-1}: f(I) \to I$

Per assurdo f non sia né strettamente crescente
né strettamente decrescente



allora $\exists\, x,y,z \in I$
$x<y<z$ e $f(z)<f(x)<f(y)$

Consideriamo $f: [y,z] \to f([y,z])$

f è continua su $[y,z]$ e dunque vale il Teorema dei valori intermedi: $\forall k \in]f(z),f(y)[\ \exists \bar{x} \in]y,z[$
t.c. $k=f(\bar{x})$

$\Rightarrow$ preso $k=f(x) \in]f(z),f(y)[\quad \exists \bar{x} \in]y,z[$:
$f(x)=f(\bar{x})$ con $\underline{x \neq \bar{x}}$ $\quad (x \notin]y,z[)$

Dunque $x\neq\bar{x}$ e $f(x)=f(\bar{x}) \Rightarrow f$ NON è iniettiva
$\Rightarrow f$ non è invertibile $\quad$ ASSURDO

potrei prendere
$\boxed{x<y<z \quad e \quad f(x)<f(z)<f(y)}$ & solite l'inversi.

Considero $f: [x,y] \to f([x,y])$ e scopro, t.l Teorema dei valori intermedi $(f(x)<f(z)<f(y))$

esiste $\bar{x} \in [x,y]$ $(\bar{x} \neq z)$: $f(\bar{x}) = f(z)$

Assurdo!!

$\blacksquare$

Teorema (f continua ~~f monotona~~ se manda intervalli in intervalli)

$f: I \to f(I)$, I intervallo, f strett. crescente (decrescente)

sono equivalenti le seguenti affermazioni

i) f continua $\forall x \in I$

ii) $f(I)$ intervallo

dim

i) $\Rightarrow$ ii) è il Teorema dei valori intermedi (e non serve la monotonia)

ii $\Rightarrow$ i)

$f: I \to f(I)$

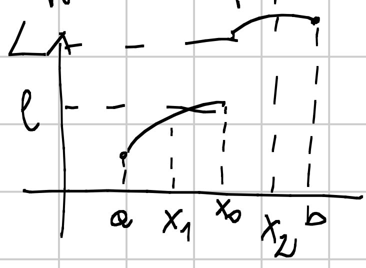
I intervallo $\Rightarrow f$ continua $\forall x \in I$

$f(I)$ intervallo

f strett. crescente (decrescente)

Per assurdo $\exists x_0 \in I$ t.c. f non è continua in x_0. Prendiamo x_0 interno ad I

Supponiamo $f \uparrow$



Ma $f \uparrow$, dunque (Teorema precedente)

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell < L = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

$$f(x_0) \begin{cases} \ell = f(x_0) \\ \ell < f(x_0) < L \\ f(x_0) = L \end{cases}$$

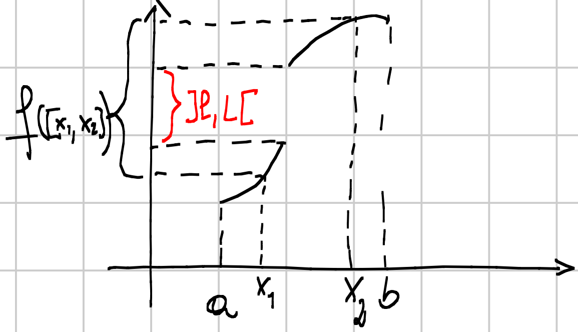
Osservo che $$]\ell, L[\cap f(I) = \begin{cases} \emptyset & f(x_0) = \ell \text{ o } f(x_0) = L \\ f(x_0) & \ell < f(x) < L \end{cases}$$

Presi $x_1 \in]a, x_0[$ $x_2 \in]x_0, b[$ devo avere $[f(x_1), f(x_2)] \subseteq f(I)$

ma questo è impossibile poiché $]\ell, L[\not\subseteq [f(x_1), f(x_2)]$

in quanto $]\ell, L[\cap [f(x_1), f(x_2)] = \emptyset$ o $f(x_0)$

ASSURDO ($f(I)$ è intervallo) $\Rightarrow f$ continua in x_0



Teorema

$f: I \to f(I)$, I intervallo, f continua $\forall x \in I$, f strettamente crescente (decrescente) su I

Allora $\exists f^{-1}: f(I) \to I$ funzione inversa

f^{-1} continua $\forall x \in f(I)$

f^{-1} strettamente crescente (decrescente)

dim

f è strett. crescente (decrescente) $\Rightarrow \exists f^{-1}: f(I) \to I$

f strett. crescente (decrescente)

f^{-1} strett. crescente (decrescente)

$\Rightarrow f^{-1}$ è continua poiché manda l'intervallo $f(I)$ nell'intervallo $f^{-1}(f(I)) = I$

(Osserviamo che $f(I)$ intervallo segue dall'ipotesi I intervallo + $f: I \to f(I)$ continua) $\blacksquare$

Teorema (derivata di f^{-1})

$f: I \to f(I)$, I intervallo, f strettamente crescente (decrescente)

f derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$

allora

$\exists f^{-1}: f(I) \to I$ derivabile $y_0 = f(x_0)$ e si ha

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{ovvero} \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

dim (FACOLTATIVA, non fatta a lezione)

Per ipotesi f derivabile in x_0 $\quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad x \to x_0$

inoltre, per la continuità di g, si ha

$$y - y_0 = f'(x_0)\big(g(y) - x_0\big) + o\big(g(y) - x_0\big) \quad y \to y_0$$

da cui segue

$$o(y-y_0) = o\big(\overset{x}{\overset{\shortparallel}{g(y)}} - x_0\big) \quad y \to y_0$$

e quindi $\quad y - y_0 = f'(x_0)\big(g(y) - x_0\big) + o(y-y_0) \quad y \to y_0$

da cui segue $\quad y - y_0 + o(y-y_0) = f'(x_0)\big(g(y) - x_0\big) \quad$ ma $f'(x_0) \neq 0$

" " " $\quad \dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (y-y_0) + o(y-y_0) = g(y) - x_0 \quad y \to y_0$

" " " $\quad g(y) = x_0 + \dfrac{1}{f'(x_0)}(y-y_0) + o(y-y_0) \quad y \to y_0$

ovvero $\quad g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} \quad$ ovvero $\quad (f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} \quad$ $\boxed{M}$

Esercizio Data $f(x) = e^x + x + 1$,
calcolare (se esiste) $(f^{-1})'(y_0)$ con $y_0 = 2$

$f'(x) = e^x + 1 \overset{\text{dim}}{>} 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \underset{\text{Thm Lagrange}}{\Longrightarrow} f$ strett. crescente su $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$

Devo trovare x_0 : $f(x_0) = y_0 = 2$ ovvero devo risolvere
$e^x + x + 1 = 2$

essendo $f \uparrow$, questa eq. ha 1! soluzione

Si osserva che $f(0) = e^0 + 0 + 1 = 2 = y_0$

dunque $\boxed{x_0 = 0}$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^0+1} = \frac{1}{2}$$

Se voglio l'eq. della retta tangente al grafico di
$(y, f^{-1}(y))$ nel punto $(2, \underset{f^{-1}(2)}{0})$

scrivo $y - f^{-1}(2) = (f^{-1})'(2) \cdot (x-2)$

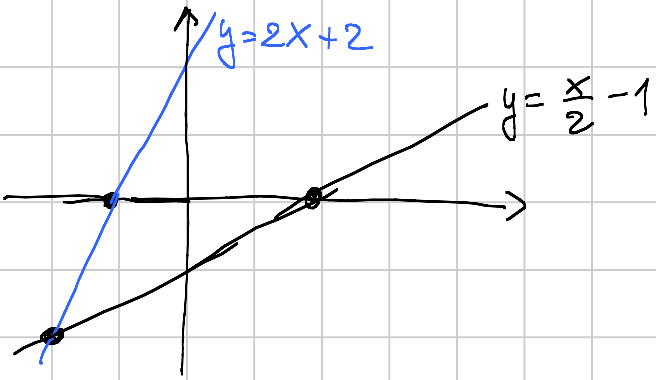
$$\boxed{y = \frac{1}{2}(x-2)}$$

Se voglio l'eq. della retta tangente al grafico
di $f(x)$ nel punto $(0,2)$ trovo

$f'(x) = e^x + 1 \qquad f'(0) = 2$

$y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$y - 2 = 2x$; $\boxed{y = 2x + 2}$



queste 2 rette si intersecano nella bisettrice nel punto $(-2,-2)$

Che si intersechino nella bisettrice non è un caso: in generale la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ si interseca con la retta tangente al grafico di f^{-1} in $(f(x_0), x_0)$ lungo la bisettrice

Retta tangente a f in $(x_0, f(x_0))$ $\qquad r(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$

$m = f'(x_0) \neq 0$

Retta tangente a f^{-1} in $(f(x_0), x_0)$ $\qquad t(x) = x_0 + \frac{1}{m}\left(x - f(x_0)\right)$

considero $\begin{cases} r(x) \\ t(x) \end{cases}$ ovvero $\begin{cases} f(x_0) + m(x - x_0) = x_0 + \frac{1}{m}\left(x - f(x_0)\right) \\ r(x) = - - \end{cases}$

ovvero $\begin{cases} m f(x_0) + m^2 x - m^2 x_0 = m x_0 + x - f(x_0) \\ // \end{cases}$

$$x(m^2 - 1) = m x_0 - f(x_0) - m f(x_0) + m^2 x_0$$
$$= m x_0 (1 + m) - f(x_0)(1 + m)$$
$$= (1 + m)(m x_0 - f(x_0))$$

Quando $m = -1$ (e dunque $\frac{1}{m} = -1$) il sistema si riduce a

$$\begin{cases} r(x) = f(x_0) - x + x_0 \\ t(x) = x_0 - x + f(x_0) \end{cases}$$

che ha ∞ soluzioni in quanto $r(x) \equiv t(x)$

Quando $\boxed{m = 1}$ il sistema diventa

$$\begin{cases} r(x) = f(x_0) + x - x_0 \\ t(x) = x_0 + x - f(x_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x_0) + \cancel{x} - x_0 = x_0 + \cancel{x} - f(x_0) \\ " \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = f(x_0) \\ \text{"} \end{cases}$$ che in generale è falso ($f(x)$ non è la funzione identica

ovvero $m=1 \Rightarrow \nexists$ intersezioni (a meno che le rette tg. alle funzioni f ed f^{-1} non coincidano con $y=x$)

Dunque supponiamo $m \neq 0, 1, -1$ e si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{1}{m-1}\left(m x_0 - f(x_0)\right) \\ r(x) = f(x_0) + m\left(\frac{1}{m-1}\left(m x_0 - f(x_0)\right) - x_0\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{"} \\ r(x) = f(x_0) + \frac{m^2}{m-1} x_0 - \frac{m}{m-1} f(x_0) - m x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{"} \\ r(x) = f(x_0)\left(\frac{\cancel{m}-1-\cancel{m}}{m-1}\right) + x_0 \cdot m\left(\frac{m}{m-1} - 1\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{"} \\ r(x) = -\frac{f(x_0)}{m-1} + m x_0 \left(\frac{1}{m-1}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{m-1}\left(m x_0 - f(x_0)\right) \\ r(x) = \frac{1}{m-1}\left(m x_0 - f(x_0)\right) \end{cases}$$

ovvero il punto di intersezione tra $t(x)$ e $r(x)$ risulta

$$\left(\frac{1}{m-1}\left(m x_0 - f(x_0)\right) ; \frac{1}{m-1}\left(m x_0 - f(x_0)\right)\right)$$

che sta sulla bisettrice del 1° e 3° quadrante