2014-11-28 - lezione 36

venerdì pomeriggio - 3 ore

Continuità → Lipschitzianità → Derivate

Def (funzione Lipschitziana)

$f: A \to \mathbb{R}$ questa si dice L-Lipschitziana (su A) se $\exists L > 0$ t.c. $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x, y \in A$

Esempio (funzione Lipschitziana)

$f(x) = 5x + 3$ questa è 5-Lipschitziana su $\mathbb{R}$

infatti,

$$|f(x) - f(y)| = |5x + \cancel{3} - 5y - \cancel{3}| = 5|x-y|$$

e dunque

$$|f(x) - f(y)| \leq 5|x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

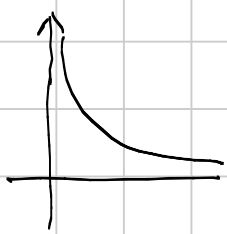
Esempio (funzione NON Lipschitziana)

f non è Lipschitziana su A se non $\left(\exists L > 0 : |f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \ \forall x, y \in A\right)$

se non $\left(\exists L > 0 : \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq L \quad \forall x, y \in A \quad x \neq y\right)$

se $\forall L > 0 \ \exists x_L, y_L \in A : \underbrace{\dfrac{|f(x_L) - f(y_L)|}{|x_L - y_L|}}\ > L$

se $\sup\limits_{\substack{x, y \in A \\ x \neq y}} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} = +\infty$



Un buon candidato è $f(x) = 1/x$ quando $x \to 0^+$

Devo provare che $\sup\limits_{\substack{x, y \in]0,1] \\ x \neq y}} \dfrac{\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|}{|x-y|} = \sup \dfrac{\frac{\cancel{|y-x|}}{|xy|}}{\cancel{|x-y|}}$

$$= \sup_{\substack{x, y \in]0,1] \\ x \neq y}} \frac{1}{xy} \geq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n+1)}} = +\infty$$

$\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \in]0,1]$

ho scoperto che $f(x) = 1/x$ NON E' Lipschitziana su $]0,1]$

Teorema (Lipschitzianità $\Rightarrow$ Continuità)

$f: A \to \mathbb{R}$ L-Lipschitziana su A

Allora f è continua $\forall x \in A$

dim

Sia preso $x_0 \in A$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 ;\ \forall x \in A\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

ma f è L-Lipschitziana ovvero $\forall x, y \in A\ |f(x) - f(y)| \le L|x-y|$

ovvero preso $y = x_0$ $\forall x \in A\ |f(x) - f(x_0)| \le L|x - x_0| < L\delta = \varepsilon$

ma allora

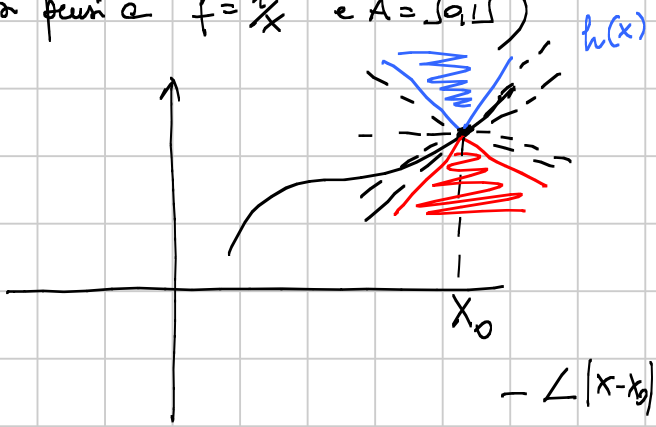
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \underbrace{\delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0}\ ;\ \forall x \in A\ |x - x_0| < \delta = \varepsilon/L \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le L \cdot |x - x_0|$

$< L \cdot \varepsilon/L = \varepsilon$

$\blacksquare$

Oss: f continua $\forall x \in A \not\Rightarrow f$ Lipschitziana su A

(si pensi a $f = 1/x$ e $A =]0,1]$)



f L-Lipschitziana su A, allora

$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$

$\Downarrow$

$-L|x - x_0| < f(x) - f(x_0) < L|x - x_0|$

$$\underbrace{f(x_0) - L|x - x_0|}_{g(x)} < f(x) < \underbrace{f(x_0) + L|x - x_0|}_{h(x)}$$

DERIVAZIONE

Def $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ p.d.a. per A. Si dice "derivata di f in x_0" e si indica con

$\underline{f'(x_0)}$ $\quad Df(x_0)$ $\quad \underline{\frac{df}{dx}(x_0)}$

il $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Quando $\exists\, f'(x_0) \in \mathbb{R}$, diciamo "$f$ derivabile in x_0"

Oss: derivata di f in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

f derivabile in x_0 se $\exists\, f'(x_0) \in \mathbb{R}$

Esempi

① La derivata di $\operatorname{sen} x$ in $x_0=0$: $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

② " " " $\cos x$ " $x_0=0$: $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

③ " " " e^x " $x_0=0$: $\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

④ La derivata di $f(x) = x^n$ in $x_0 \in \mathbb{R}$. Voglio calcolare

$$n=1 \quad \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$$

$$n=2 \quad \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}(x+x_0)}{\cancel{x-x_0}} = 2x_0$$

$$n=3 \quad \lim_{x\to x_0} \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}(x^2+x x_0+x_0^2)}{\cancel{x-x_0}} = 3x_0^2$$

$\dots$

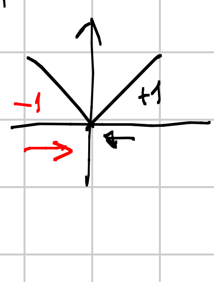
$$n \quad \lim_{x\to x_0} \frac{x^n-x_0^n}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot x_0+x^{n-3}\cdot x_0^2+\dots+x_0^{n-1})}{\cancel{x-x_0}} = n x_0^{n-1}$$

Pb: Tutte le funzioni sono derivabili?

NO: infatti vale il seguente

Controesempio (f.ne non derivabile in $x_0=0$)

$f(x) = |x|$ non è derivabile in $x_0=0$



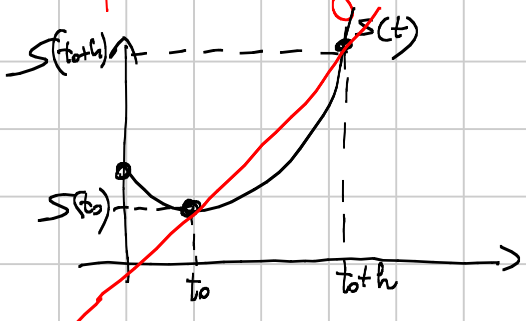
proverò che $\nexists \lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0}$ e infatti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\neq \quad \Rightarrow \nexists\, f'(0) \;!!!$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Interpretazione geometrica della derivata



$$y = S(t_0) + \frac{S(t_0+h) - S(t_0)}{h}(t - t_0)$$

un punto che si muove su traiettoria rettilinea con legge oraria $S(t)$

$$\frac{S(t_0+h) - S(t_0)}{t_0+h-t_0} = \boxed{\frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h}}$$

V_{media} del punto mobile nell'intervallo temporale $[t_0, t_0+h]$

Quando h posso renderlo piccolo, e la velocità media approssima sempre di più un valore (posto che esista) che potremmo dire "velocità istantanea del punto in t_0"
Dal punto di vista fisico, non so se $\exists$ questa velocità istantanea, però se esiste il $\lim_{h \to 0} \frac{S(t_0+h) - S(t_0)}{h} = S'(t_0)$

questo è il valore limite del coeff. angolare, e la retta del fascio di centro $(t_0, S(t_0))$ e coeff. angolare $S'(t_0)$ rappresenta quella che definiamo "retta tangente al grafico di $S(t)$ in $t_0, S(t_0)$"

Def (differenziabilità)

Data $f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ pdo per A diciamo che "f differenziabile in x_0" se

D) $\exists a \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$.

ovvero

D') $\exists a \in \mathbb{R}$: $\boxed{f(x) - \underbrace{(f(x_0) + a(x - x_0))}_{r(x)} = o(|x - x_0|; x_0)}$

- a viene detto "differenziale di f in x_0" e si scrive $a = df(x_0)$
- la retta $r(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$ viene detta retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$

Teorema (in $\mathbb{R}$ differenziabilità $\equiv$ derivabilità)

$f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ pda sono tra loro equivalenti

i) f differenziabile in x_0 e $df(x_0) = f'(x_0)$

ii) f derivabile " " " $f'(x_0) = df(x_0)$

e la retta tangente in $(x_0, f(x_0))$ ha equazione

$$r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

dim

i) $\Rightarrow$ ii) Hp $\exists a \in \mathbb{R}$: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x-x_0)}{|x - x_0|} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to x_0^+} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a\right) = 0 \\ \lim_{x\to x_0^-} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{-(x-x_0)} + a\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a = f'(x_0)$$

ii) $\Rightarrow$ i) Hp $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)\right) = o\,(x - x_0;\ x_0)$$

$\Rightarrow$ f differenziabile in x_0 $\quad$ ///

Oss: f continua $\not\Rightarrow$ f derivabile (esempio $f = |x|$ in $x_0 = 0$)

Pb: f derivabile in x_0 $\overset{?}{\Rightarrow}$ f continua in x_0 ?

SI, infatti vale

Teorema

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ pda per A

se f derivabile in x_0 allora f continua in x_0

dim

per ipotesi $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$

ovvero $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{x - x_0} = 0$

ovvero $\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = 0$

ovvero, dato che $\lim_{x\to x_0} f'(x_0)(x-x_0) = 0$, si ha che

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)-f(x_0)\right)=0$$ che è la continuità ∎

OSS: La derivabilità è un concetto LOCALE (dipende dal punto x_0), mentre la Lipschitzianità è un concetto GLOBALE (dipende dall'insieme)

Esercizio Calcolo delle derivate delle f.ni elementari

$\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x, x^m

dim

Calcolo $f'(x_0)$ quando $f(x)=\operatorname{sen} x$ con la definizione

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{sen}(x_0+(x-x_0))-\operatorname{sen} x_0}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(\operatorname{sen} x_0\cos(x-x_0)+\operatorname{sen}(x-x_0)\cos x_0-\operatorname{sen} x_0\right)$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{sen} x_0}{x-x_0}\cdot\left(\cos(x-x_0)-1\right)+\lim_{x\to x_0}\cos x_0\cdot\frac{\operatorname{sen}(x-x_0)}{x-x_0}\qquad \boxed{y=x-x_0}$$

$$=\operatorname{sen} x_0\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{y}}_{=0}+\cos x_0\cdot\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{=1}=\cos x_0$$

$$f=\operatorname{sen} x\longrightarrow f'(x_0)=\cos x_0\qquad\forall x_0\in\mathbb{R}$$

Calcolo $f'(x_0)$ quando $f(x)=\cos x$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\cos(x_0+(x-x_0))-\cos x_0}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(\cos x_0\cos(x-x_0)-\operatorname{sen} x_0\operatorname{sen}(x-x_0)-\cos x_0\right)$$

$$=\lim_{x\to x_0}\cos x_0\frac{\cos(x-x_0)-1}{x-x_0}-\operatorname{sen} x_0\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{sen}(x-x_0)}{x-x_0}\qquad y=x-x_0$$

$$=\cos x_0\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{y}-\operatorname{sen} x_0\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}=-\operatorname{sen} x_0$$

$$f=\cos x\longrightarrow f'(x_0)=-\operatorname{sen} x_0\qquad\forall x_0\in\mathbb{R}$$

$f(x) = e^x$ e calcolo $f'(x_0)$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} \qquad y = x - x_0$$

$$= e^{x_0} \cdot \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = e^{x_0}$$

$$f(x) = e^x \longrightarrow f'(x_0) = e^{x_0} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^n \longrightarrow f'(x_0) = n x_0^{n-1} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$n \geq 1$

$$f(x) = c \quad c \in \mathbb{R} \longrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

infatti $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$

Abbiamo calcolato le derivate delle funzioni elementari

Ora devo calcolare
- prodotti di f.ni elementari
- somme " " "
- composizioni " " "

Teorema

$f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ p.to per A, $f \, e \, g$ derivabili in x_0

1) $(f+g)$ è derivabile in x_0 e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) $(f \cdot g)$ " " " " $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(formula di Leibniz)

dim

per ipotesi $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0; x_0)$

$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0; x_0)$

- $f(x)+g(x) = f(x_0)+g(x_0) + \underbrace{\left(f'(x_0)+g'(x_0)\right)}(x-x_0) + o(x-x_0, x_0)$

questo è la def di differenziabilità per $f+g$ e dunque

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$$

- $f(x)\cdot g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)(x-x_0) + f'(x_0)(x-x_0)\cdot g(x_0)$
$\quad + \underbrace{f'(x_0)\,g'(x_0)\,(x-x_0)^2} + o(x-x_0; x_0)$

$= f(x_0)\,g(x_0) + \underbrace{\left[f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0)\right]}(x-x_0) + o(x-x_0; x_0)$

dunque $f\cdot g$ è differenziabile (quindi derivabile) in x_0 e ci ho $(fg)'(x_0) = f(x_0)\,g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$ ▨

Teorema

$f: A\to\mathbb{R}$ $\quad g: B\to\mathbb{R}$ $\quad x_0\in\Omega = f^{-1}(f(A)\cap B)$ p.d.a. per Ω

f derivabile in x_0

g " " $f(x_0)=y_0$

$\Rightarrow$ $(g\circ f)$ derivabile in x_0 e ci ho

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

dim

f diff. in x_0 $\quad f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0; x_0)$

g " " $y_0=f(x_0)$ $\quad g(y) = g(y_0) + g'(y_0)\underbrace{(y-y_0)}_{f(x)-f(x_0)} + o(y-y_0; x_0)$ (*)

quando $x\to x_0 \Rightarrow y=f(x)\to y_0=f(x_0)$ e $f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0; x_0)$

e sostituendo in (*)

$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\left[f'(x_0)\cdot(x-x_0)+o(x-x_0; x_0)\right]$
$\quad + o\left(f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0; x_0); x_0\right)$

$= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0; x_0)$

$\Rightarrow (g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$ ▨

Esercizio Calcolare $f'(x)$ dove $f(x) = x^8$
$\overset{!}{=} x^2 \cdot x^6$
$\overset{!}{=} (x^4)^2$

dire

$f(x) = x^8$ si ha che $f'(x_0) = 8x_0^7 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

però

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$ dove $g(x) = x^2 \quad h(x) = x^6$

$$f'(x_0) = g'(x_0) \cdot h(x_0) + g(x_0)\, h'(x_0) =$$
$$= (2x_0) \cdot x_0^6 + x_0^2 \cdot (6x_0^5) = 8 \cdot x_0^7$$

però

$f(x) = (m \circ \ell)(x) = (x^4)^2$ ovvero $\ell(x) = x^4$
$m(y) = y^2$

$$f'(x_0) = m'(\ell(x_0)) \cdot \ell'(x_0) \qquad m'(y_0) = 2y_0$$
$$= m'(x_0^4) \cdot (4 \cdot x_0^3)$$
$$= 2(x_0^4) \cdot (4 \cdot x_0^3) = 8x_0^7 \qquad \blacksquare$$

Esempio Calcolare $f'(x_0)$ dove
$f(x) = \cos(1 + \operatorname{sen}^2(x))$

$$x \xmapsto{g} 1 + \operatorname{sen}^2 x \xmapsto{h} \cos(1 + \operatorname{sen}^2 x)$$

$$f(x) = h(g(x)) = (h \circ g)(x)$$

$h(y) = \cos(y) \longrightarrow h'(y_0) = -\operatorname{sen} y_0$
$g(x) = 1 + \operatorname{sen}^2 x \longrightarrow g'(x_0) = (1)' + (\operatorname{sen}^2 x_0)' \quad (*)$
$= 0 + 2 \operatorname{sen} x_0 \cdot \cos x_0$

$$f'(x_0) = h'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) = -\operatorname{sen}(g(x_0)) \cdot 2 \operatorname{sen} x_0 \cos x_0$$
$$= -\operatorname{sen}(1 + \operatorname{sen}^2 x_0) \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} x_0 \cdot \cos x_0$$

(*) devo calcolare la derivata di $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

$$x \xmapsto{g(x)} \operatorname{sen} x \xmapsto{h(x)} \operatorname{sen}^2 x \qquad h(y) = y^2 \quad g(x) = \operatorname{sen} x$$

$$f(x) = (h \circ g)(x) \qquad f'(x_0) = h'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$
$$= 2(g(x_0)) \cdot \cos x_0$$
$$= 2 \operatorname{sen} x_0 \cdot \cos x_0$$

OSS: $f(x) = (l \circ h \circ g)(x)$

$$f'(x_0) = l'((h \circ g)(x_0)) \cdot h'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

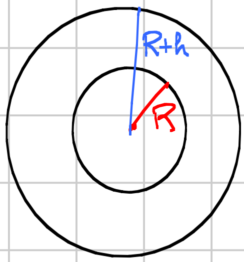
$$f'(x_0) = \{l \circ [h \circ g]\}'(x_0) = l'((h \circ g)(x_0)) \cdot (h \circ g)'(x_0)$$

in generale $f = (g_m \circ g_{m-1} \circ \dots \circ g_1)(x)$

$$f'(x) = g_m'(g_{m-1} \circ \dots \circ g_1(x)) \cdot (g_{m-1} \circ \dots \circ g_1)'(x)$$
$$= g_m'(g_{m-1} \circ \dots \circ g_1(x)) \cdot g_{m-1}'(g_{m-2} \circ \dots \circ g_1(x)) \cdot (g_{m-2} \circ \dots \circ g_1)'(x)$$

e così via.

OSS:



Area cerchio raggio R

$$\frac{A(R+h)-A(R)}{h} = \frac{\pi(R+h)^2-\pi R^2}{h}$$

$$= \frac{\cancel{\pi R^2}+2\pi R h+\pi h^2-\cancel{\pi R^2}}{h}$$

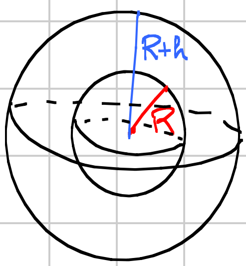
$$= 2\pi R + \pi h \xrightarrow[h\to 0]{} 2\pi R$$

$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; \parallel$$

$$P(R)$$

lungh. perimetro

circonf. raggio R



Volume sfera raggio R

$$\frac{V(R+h)-V(R)}{h} = \frac{\frac{4}{3}\pi(R+h)-\frac{4}{3}\pi R^3}{h}$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1}{h}\left(\cancel{R^3}+\underline{3R^2h}+3Rh^2+h^3-\cancel{R^3}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot \left(3R^2+3Rh+h^2\right)$$

$$\Big\downarrow h\to 0$$

$$4\pi R^2 = S(R)$$

superficie sfera raggio R

$$\frac{P(R+h)-P(R)}{h} = \frac{2\pi(R+h)-2\pi R}{h} = 2\pi \longrightarrow 2\pi$$

Teorema (derivata di f^{-1})

Data $f:]a,b[\to f(]a,b[)$ strett. crescente (decrescente)

f derivabile in $x_0 \in]a,b[$ $\quad f'(x_0) \neq 0$

allora $f^{-1}(x)$ è derivabile in $f(x_0)$

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x_0)\right) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ovvero $\quad y_0 = f(x_0)$

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

OSS: f derivabile in x_0 e f^{-1} derivabile in $f(x_0)$

Il legame tra f ed f^{-1} è il seguente $\quad f^{-1}\left(f(x)\right) = x \quad \forall x \in]a,b[$

$$\boxed{\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x}$$

$$\left(f^{-1} \circ f\right)'(x_0) = 1 \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'\left(f(x_0)\right) \cdot f'(x_0) = 1$$

e se $f'(x_0) \neq 0 \qquad \left(f^{-1}\right)'\left(f(x_0)\right) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Questo serve per ottenere l'espressione di $\left(f^{-1}\right)'\left(f(x_0)\right)$ ma non è una dim poiché non posso partire dicendo che $\exists \left(f^{-1}\right)'$, come da dimostrare!

Esempio dato $f(x) = e^x$ voglio calcolare $\left(f^{-1}\right)'(x_0)$

ovvero la derivata di $f^{-1}(x) = \log_e x$

dim

$f(y) = e^y$ che è derivabile e strett. crescente su $\mathbb{R}$

quindi, essendo $f'(y_0) = e^{y_0} > 0 \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}$ esiste la derivata di $f^{-1}(x) = \log x$ e si ha

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x_0)\right)} = \frac{1}{e^{f^{-1}(x_0)}} = \frac{1}{e^{\log x_0}} = \frac{1}{x_0}$$

Esempio Data $f(y) = Tg(y)$, calcolare $(f^{-1})'(x_0)$

dim

f continua, derivabile su $]-\pi/2, \pi/2[$ e strett. crescente

$$f'(x_0) = \frac{1}{\cos^2 x_0} = 1 + Tg^2(x_0) \quad (*) \text{ (da verificare)}$$

$\neq 0$

$\Rightarrow \exists (f^{-1})'(x_0)$ dove $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} = \frac{1}{1 + Tg^2(f^{-1}(x_0))}$$

$$= \frac{1}{1 + [Tg(\operatorname{arctg}(x_0))]^2} = \frac{1}{1 + x_0^2}$$

Teorema

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ p.d.a. per A, $f(x_0) \neq 0$, f derivabile in x_0

Allora $\exists \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$

dim

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1/f(x) - 1/f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{f(x) \cdot f(x_0)} =$$

$$= -\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x) f(x_0)} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)} \quad ///$$

Esercizio la derivata di $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = Tg x$

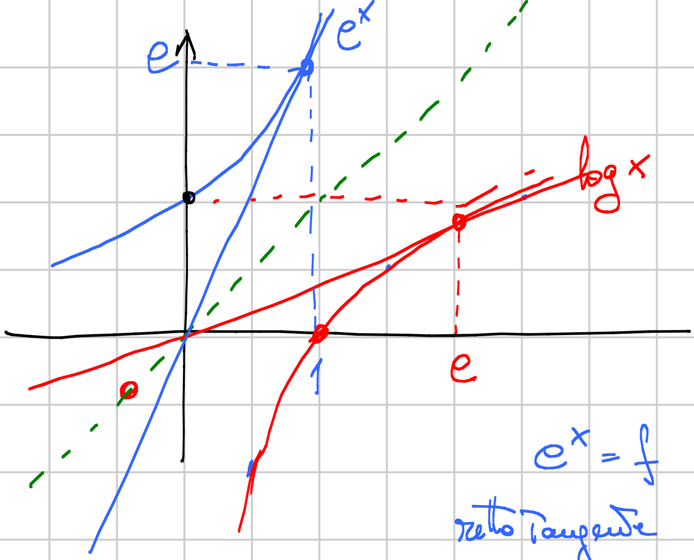
è $f'(x_0) = \frac{1}{\cos^2 x_0} = 1 + Tg^2 x_0$

dim

$$f'(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \left(\operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{\cos x}\right)' =$$

$$= (\operatorname{sen} x)' \cdot \frac{1}{\cos x} + \operatorname{sen} x \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x}{\cos x} + \operatorname{sen} x \cdot \left(\frac{-(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}\right)$$

$$= 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + Tg^2 x = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad ///$$



$(1, e) \in \text{graf } e^x$

$(e, 1) \in \text{graf } \log_x$

$e^x = f \quad f'(1) = e^1 = e$

retta tangente

$r_0(x) = e^1 + e \cdot (x-1)$

$f^{-1} = \log x \quad (f^{-1})' = \frac{1}{x} \quad (f^{-1})'(e) = 1/e$

$$\boxed{r_1(x) = 1 + \frac{1}{e}(x-e)}$$

$\begin{cases} r_1(x) \\ r_0(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \cancel{1} + \frac{1}{e}x - \cancel{1} \\ y = \cancel{e} + ex - \cancel{e} \end{cases}$ si intersecano in $(0,0)$