2014-11-25-Lezione 35 martedì 8.30-10.30 1

Esercizio Studiare la convergenza di

$$\sum_n (-1)^n \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

dim

Questa serie è della forma $\sum_n (-1)^n \cdot a_n$

dove $a_n = \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

i) $a_n > 0 \quad \forall n \geq 1$

ii) $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1-\cos(0) = 0$

iii) $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \geq 1$

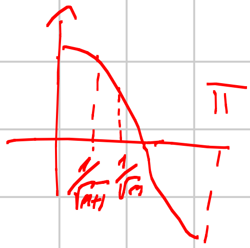
$$\Updownarrow$$

$$\cancel{1}-\cos\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \cancel{1}-\cos\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n \geq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \cos\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n \geq 1$$

$\Updownarrow \leftarrow$ $\cos x$ è decrescente in $]0,\pi[$



$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n \geq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n} \quad \forall n \geq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$n+1 > n \quad \forall n \geq 1$$

che è vero!!

$\Longrightarrow$ (Criterio di Leibniz) La serie a termini di segno alterno CONVERGE $\boxed{///}$

Teorema ($\exists$ degli zeri o di Bolzano)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato

f continua $\forall x \in [a,b]$

$f(a) \cdot f(b) < 0$

$\Longrightarrow \exists z \in]a,b[\; : \; f(z) = 0$

OSS : Se $f(x) = ax^2+bx+c$ allora $\exists$ formula che mi dà le radici di $f(x)=0$

Se $f(x) = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$
allora $\exists$ formule risolutive di $f(x)=0$
(Cardano)

Se $f(x) = a_4x^4+ \dots +a_0$
allora $\exists$ formule risolutive di $f(x)=0$

Teorema (di Abel)
$\nexists$ formule risolutive per trovare le radici di un polinomio di 5 grado

Il Teorema di Bolzano si applica a $\forall$ funzione continua su un intervallo $[a,b]$
per esempio

$$f(x) = \operatorname{sen} x + e^x \qquad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)+e^{-\pi/2}<0$$

$$f(0) = 1 > 0$$

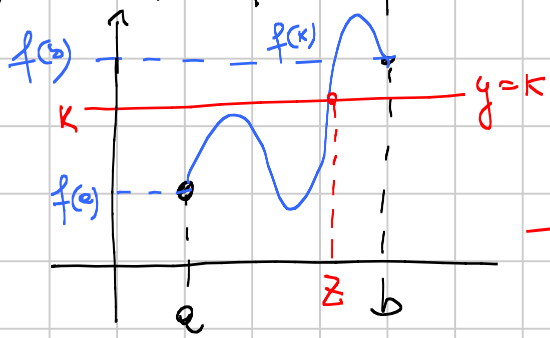
$$\Rightarrow \text{(per Bolzano)} \quad \exists\ z \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[\ : \ f(z)=0$$

Teorema (Corollario Teorema Bolzano)
$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo
Presi $x_1, x_2 \in I$ t.c. $f(x_1)<f(x_2)$
Allora $\forall k \in \mathbb{R} : f(x_1)<k<f(x_2)$ $\exists z \in]x_1,x_2[$
$f(z) = k$

Teorema (Corollario Teorema Bolzano)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua t.c. $f(a) < f(b)$

Allora $\forall k \in \mathbb{R}$ $f(a) < k < f(b)$ $\exists\, z \in \,]a,b[\,$ $f(z) = k$



$\boxed{f(z)=k}$

Dim

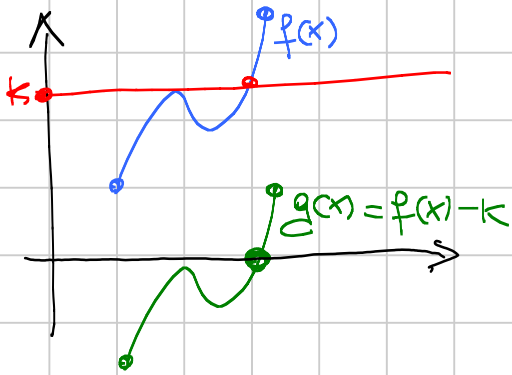
Introduco la funzione ausiliaria $g(x) = f(x) - k$

- $g: [a,b] \to \mathbb{R}$
- g è continua $\forall x \in [a,b]$ (è differenza di funzioni continue)
- $g(a) = f(a) - k < 0 < f(b) - k = g(b)$

Dunque g soddisfa le ipotesi del Teorema di Bolzano

e dunque $\exists\, z \in \,]a,b[\, : g(z) = 0 = f(z) - k$

" " $\exists\, z \in \,]a,b[\, : f(z) = k$ $\blacksquare$



Teorema (dei valori intermedi)

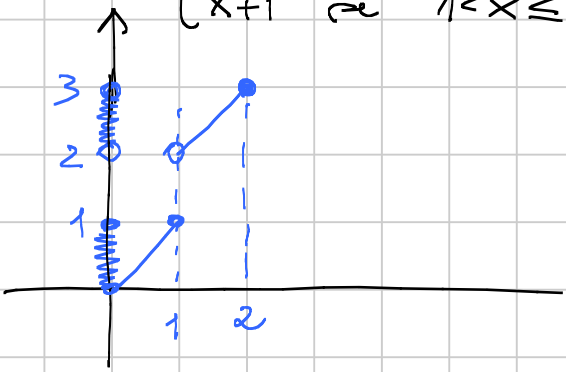
$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua $\forall x \in I$

Allora $f(I)$ è un intervallo

Oss: Teorema Val. Intermedi: "f continua manda intervalli in intervalli"

Controesempio $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ x+1 & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}$$



$f([0,2]) = \underbrace{[0,1] \cup]2,3]}_{\text{non è un intervallo}}$

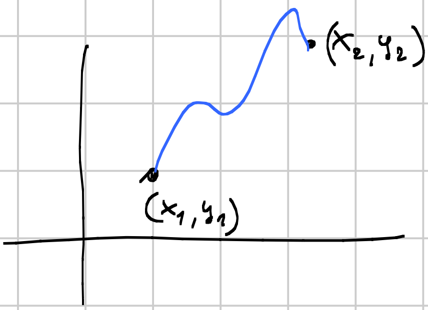
e osservo che f non è continua in $[0,2]$

dim

La mia Tesi: $\forall y_1 < y_2 \in f(I) \quad [y_1, y_2] \subseteq f(I)$

$y_1, y_2 \in f(I) \quad y_1 < y_2 \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in I \quad f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$

ma $y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ (e non è restrittivo supporre $x_1 < x_2$)



$f: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ continua
$f(x_1) < f(x_2)$

$\Downarrow$

$\forall k \in \mathbb{R} \quad f(x_1) < k < f(x_2)$
$\exists z \in]x_1, x_2[\; : \; f(z) = k$

e dunque $\forall k \quad y_1 < k < y_2 \quad \exists z \in]x_1, x_2[:$
$f(z) = k$

Dunque $[y_1, y_2] \subseteq f(I)$ ▨

Oss: lo applicheremo nelle dimostrazioni di:
- continuità di f^{-1}
- Teorema della media integrale

Corollario (Teorema Weierstrass + Valori Intermedi)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\forall x \in [a,b]$

$[a,b]$ intervallo chiuso e limitato

allora $f([a,b]) = [m, M]$ dove

$m = \min f([a,b]) \qquad M = \max f([a,b])$

dim

Per il Teorema di Weierstrass $\exists\, x_m, x_M \in [a,b]$ t.c.

$m = f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) = M$.

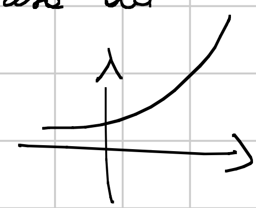
Per il Teorema dei Valori intermedi

$f([a,b])$ è un intervallo .

Da cui segue la Tesi, in quanto $f(x_m)$ e $f(x_M) \in f([a,b])$

$\blacksquare$

Pb Il Teorema di Weierstrass vale su intervalli chiusi e limitati, e infatti preso ad esempio



$f(x) = e^x$, si ha che

$\inf f(\mathbb{R}) = 0$ che non è minimo

$\sup f(\mathbb{R}) = +\infty$ " " " massimo

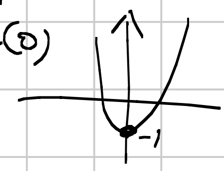
Però ...

Data $f(x) = x^2$ che è continua su $\mathbb{R}$

$\sup f(\mathbb{R}) = +\infty$ ma $\inf f(\mathbb{R}) = \underset{\substack{\parallel \\ f(0)}}{0} = \min f(\mathbb{R})$

Data $f(x) = x^4 - 1$ che è continua su $\mathbb{R}$

$\sup f(\mathbb{R}) = +\infty$ ma $\inf f(\mathbb{R}) = \underset{\substack{\parallel \\ f(0)}}{-1} = \min f(\mathbb{R})$



Teorema (Corollario Weierstrass su intervalli illimitati) 6

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua $\forall x\in\mathbb{R}$

1) Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$ allora $\exists x_m : f(x_m)=\min f(\mathbb{R})$

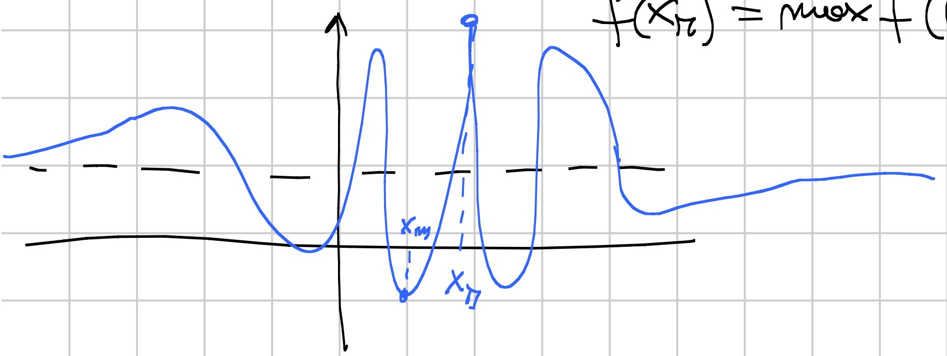
2) Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$ allora $\exists x_M : f(x_M)=\max f(\mathbb{R})$

3) Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ ed esiste $a\in\mathbb{R}: f(a)>\ell$

$b\in\mathbb{R}\ f(b)<\ell$

allora $\exists x_m, x_M : f(x_m)=\min f(\mathbb{R})$

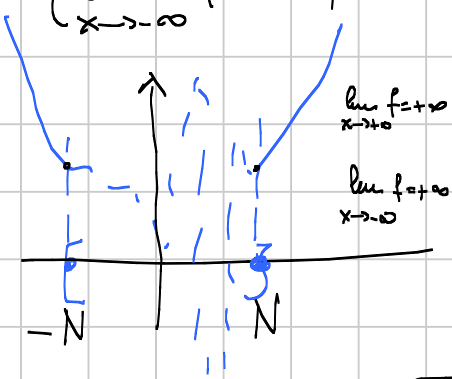
$f(x_M)=\max f(\mathbb{R})$



dim

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua $\forall x\in\mathbb{R}$

$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\end{cases} \Rightarrow \exists \min f(\mathbb{R})$



$\lim_{x\to+\infty} f=+\infty$ $\forall M>0\ \exists N_1>0 ; \forall x>N_1 \quad f(x)>M$

$\lim_{x\to-\infty} f=+\infty$ $\forall M>0\ \exists N_2>0 : \forall x<-N_2 \quad f(x)>M$

$N=\max\{N_1,N_2\}$

— $\forall M>0\ \exists N>0 ; \forall x : x<-N$ o $x>N$

$f(x)>M$

— $\forall M>0\ \exists N>0 : \forall x \quad |x|>N \quad f(x)>M$

— $\forall M>0\ \exists N>0 : \forall x\notin[-N,N] \quad f(x)>M$

Ma $f:[-N,N]\to\mathbb{R}$ è continua su un chiuso limitato allora per Weierstrass $\exists \min f([-N,N])$

$$\min f(\mathbb{R}) = \min\{\min f([-N,N]),\ \min f(]-\infty,-N[),\ \min f(]N,+\infty[)\}$$

$$\geq \min\{\min f([-N,N])\ ;\ M\ ;\ M\} \geq \min f([-N,N])$$

$\Rightarrow \min f(\mathbb{R}) = \min f([-N,N])$ che esiste

2) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

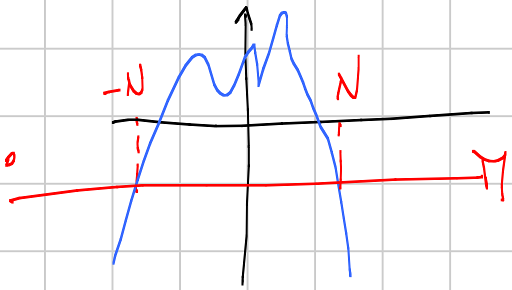
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $\Rightarrow \exists \max f(\mathbb{R})$

per ipotesi $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$ $\quad \forall M<0\ \exists N_1>0 : \forall x<-N_1\ f(x)<M$

$\lim_{x\to+\infty} f = -\infty$ $\quad \forall M<0\ \exists N_2>0\ \forall x>N_2\ f(x)<M$

$N = \max\{N_1, N_2\}$

• $\forall M<0\ \exists N>0\ ;\ \forall x \notin [-N,N]\quad f(x)<M$.



osservo che

$\max f([-N,N]) \geq M$

$$\max f(\mathbb{R}) = \max\{\max f(]-\infty,-N[),\ \max f([-N,N]),\ \max f(]N,+\infty[)\}$$

$$\leq \max\{M,\ \max f([-N,N]),\ M\}$$

$$= \max f([-N,N])$$

ma quest'ultimo esiste poiché f continua su $[-N,N]$ chiuso e limitato

e dunque $\max f(\mathbb{R}) = \max f([-N,N])$ che esiste

3) Per ipotesi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ ovvero

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N_1>0 : \forall x>N_1 \quad \ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon$

$\quad " \quad \exists N_2>0 \ \forall x<-N_2 \quad \ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N = \max\{N_1, N_2\} \ \forall x \ |x|>N \quad \ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon$

Per ipotesi $\exists a : f(a) > \ell \quad \exists b : f(b) < \ell$: preso

$\varepsilon = \min\{f(a)-\ell ; \ell - f(b)\} \ \exists N>0 : \forall x \ |x|>N \quad f(b) \le \ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon \le f(a) \quad (*)$

e dunque

$$\min f(\mathbb{R}) = \min\{\min f(]-\infty,-N[) ; \min f([-N,N]) ; \min f(]N,+\infty[)\}$$
$$\underset{(*)}{\ge} \min\{\ell-\varepsilon, \min f([-N,N]), \ell-\varepsilon\} \underset{f(b)<\ell}{\ge} \min f([-N,N])$$

ma $\exists \min f([-N,N])$ x il Teorema Weierstrass $\Rightarrow \exists \min f(\mathbb{R}) = \min f([-N,N])$

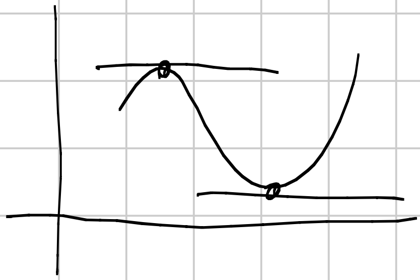
analogamente

$$\max f(\mathbb{R}) = \max\{\max f(]-\infty,-N[) ; \max f([-N,N]) ; \max f(]N,+\infty[)\}$$
$$\underset{(*)}{\le} \max\{\ell+\varepsilon ; \max f([-N,N]) ; \ell+\varepsilon\} \underset{\ell+\varepsilon<f(a)}{\le} \max f([-N,N])$$

ma $\exists \max f([-N,N])$ per il Teorema di Weierstrass $\Rightarrow$

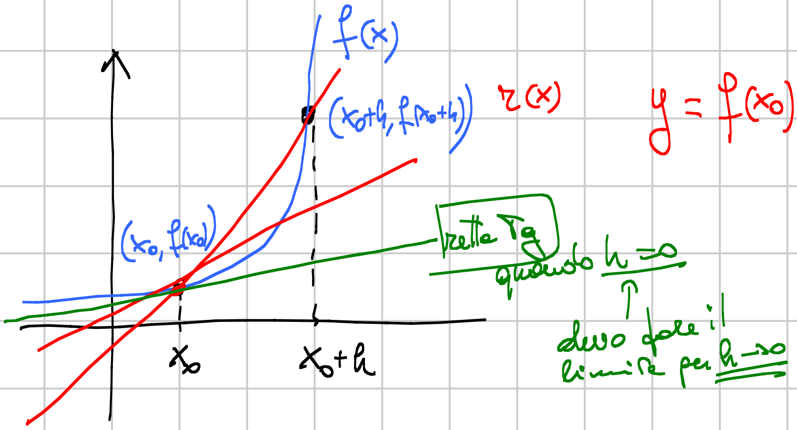
$\Rightarrow \max f(\mathbb{R}) = \max f([0,1])$ $\quad$ ▥

Pierre de Fermat : la tangente (da definire) al grafico in un punto di max/min relativo (da definire) è parallela all'asse x



C'è un legame tra tangente / "inclinata così" e crescenza

c'è un legame tra segno della derivata e crescenza/decrescenza



$$y = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0}}_{\text{velocità media del punto che si muove con legge oraria } f(x)=y}(x - x_0)$$

Geometricamente $r(x)$ retta secante il grafico in $(x_0, f(x_0))$ $(x_0+h, f(x_0+h))$

Fisicamente Il coeff. angolare di $r(x)$ è la vel. media

retta tangente al grafico

passare al limite per $h \to 0$ in

$$r_h(x) : \quad y = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot (x - x_0)$$

Def Data $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ p.d.a. per A,

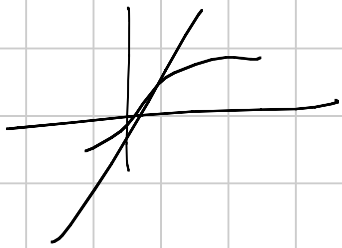
Diciamo che "f è derivabile in x_0" se

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

e, quando esiste il limite, scriviamo

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \underbrace{Df(x_0)}_{\text{si usa poco in analisi 1}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(0+h) - \operatorname{sen}(0)}{(0+h) - 0}$$



Def (retta tangente)

Data $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ p.d.a. per A, diciamo "retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$" la retta (se esiste, ovvero quando f derivabile in x_0)

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$