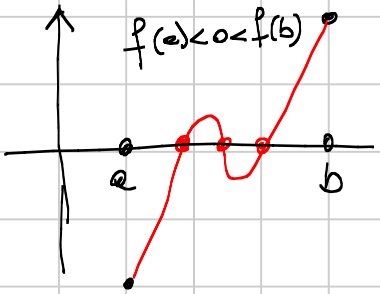
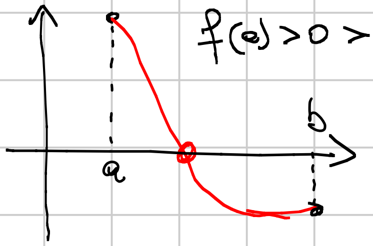
Lezione di Recupero venerdì 28/11/2014
ORE 13,30 – 17.30 Aula P

Teorema (di Bolzano - di esistenza degli zeri)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ intervallo chiuso limitato
f continua $\forall x \in [a,b]$

Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora $\exists z \in]a,b[: f(z) = 0$



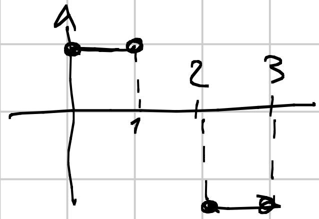


Controesempi

1) Lascio cadere ipotesi "intervallo"

Sia $f : \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ -2 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$ questa è continua, $f(0) \cdot f(3) < 0$

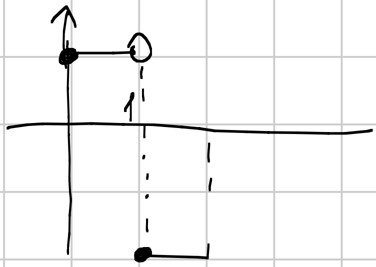
però $f \neq 0$ sempre



2) Lasciamo cadere ipotesi di "continuità $\forall x \in [a,b]$"

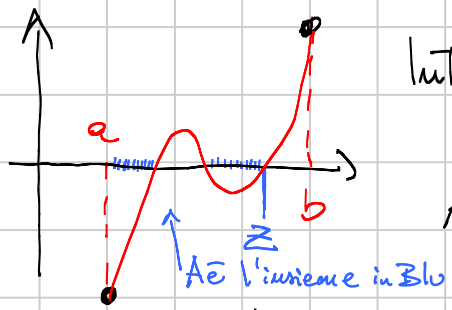
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ -2 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

questa è definita su $[0,2]$, $f(0) \cdot f(2) < 0$, ma
$f(x) \neq 0 \ \forall x \in [0,2]$



dim

Supponiamo (e non è restrittivo) che $f(a)<0<f(b)$



Introduco l'insieme

$$A=\{x\in[a,b] : f(x)<0\}$$

$A\neq\emptyset$ poiché $a\in A$, inoltre $b\notin A$

$z=\sup A < b$!!

Questo z è il "candidato" ad essere uno zero di f !!

$$f(z)\begin{cases}>0 & (1)\\ =0 & (2)\\ <0 & (3)\end{cases}$$

questi sono tutti i casi possibili

Proviamo che la (1) conduce ad un assurdo

$f(z)>0 \Longrightarrow$ (Teorema permanenza segno)

$\exists\delta>0 : \underline{f(x)>0} \quad \underline{\forall x\in\,]z-\delta,z+\delta[}$

allora $z=\sup A=\sup\{x : f(x)<0\}<z-\delta$ Assurdo

Proviamo che la (3) conduce ad un assurdo

$f(z)<0 \Longrightarrow$ (teorema permanenza segno)

$\exists\delta>0 : f(x)<0 \quad \forall x\in\,]z-\delta,z+\delta[$

allora $z=\sup A=\sup\{x : f(x)<0\}>z+\delta$ Assurdo

Dunque $f(z)=0$

Metodo di Bisezione

$f(x)=x^3-x+1$

$f(-2)=-8+2+1=-5$

$f(0)=1$

f continua su $[-2,1]$

$\Rightarrow$ per il Teorema di $\exists$ degli zeri $\exists z\in\,]-2,1[: f(z)=0$

Il Teorema appena provato NON mi dice come localizzare z

$f(-2) < 0 < f(0)$

prendiamo $-1 = \dfrac{-2+0}{2}$ punto medio

$f(-1) = (-1)^3 + 1 + 1 = 1$ $\qquad f(x) = x^3 - x + 1$

Dunque

$f(-2) < 0 < f(-1)$ $\quad$ f continua su $[-2,-1]$

dunque c'è uno zero in $]-2,-1[$

Prendo $\dfrac{-2-1}{2} = -\dfrac{3}{2}$ punto medio $[-2,-1]$

e considero

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{-27+12+8}{8} = -\frac{7}{8} < 0$$

dunque $f\left(-\frac{3}{2}\right) < 0 < f(-1)$

e così via

Quando mi fermo?

a) se trovo lo zero come punto medio

b) quando l'ampiezza dell'intervallo è "abbastanza" piccola

Esercizi sulle serie numeriche

Esercizio Dire se sono vere o false le seguenti proposizioni

1) "$\sum_n a_n$ converge $\Longrightarrow \sum_n a_n^2$ converge"

2) "$\sum_n a_n^2$ converge $\Longrightarrow \sum_n \frac{a_n}{n}$ converge"

3) "$\sum_n a_n$ converge $\Longrightarrow \sum_n \sqrt{a_n}$ converge"

dato $a_n \geq 0 \quad \forall n$

dim

1) "$\sum_n a_n$ converge $\Longrightarrow \sum_n a_n^2$ converge"

Se $\sum_n a_n$ converge $\overset{\text{C.N. di conv.}}{\Longrightarrow} a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \ a_n < 1$

$\Longrightarrow \forall n > \bar{n} \quad a_n^2 \leq a_n < 1$ ma $\sum_n a_n$ converge

$\Longrightarrow$ (Teorema Confronto) $\sum_n a_n^2$ converge

e dunque la 1) È VERA

2) "$\sum_n a_n^2$ converge allora $\sum_n \frac{a_n}{n}$ converge"

$\forall n \geq 1$

$$\left(a_n - \frac{1}{n}\right)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow a_n^2 + \frac{1}{n^2} - 2\frac{a_n}{n} \geq 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \geq \frac{a_n}{n} \\ \frac{1}{2} \sum_n a_n^2 \text{ converge} \\ \frac{1}{2} \sum_n \frac{1}{n^2} \text{ converge} \end{cases} \Longrightarrow \sum_n \frac{a_n}{n} \text{ converge}$$

Ne segue che la 2) È VERA

3) "$\sum_n a_n$ converge $\Rightarrow \sum_n \sqrt{a_n}$ converge"

Osservo che $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.

Penso sia falsa: vorrei un controesempio, ovvero a_n: $\sum_n a_n$ converge e $\sum_n \sqrt{a_n}$ diverge

$\sum_n 1/n^2$ converge e $\sum_n \sqrt{1/n^2} = \sum_n 1/n$ diverge

Esercizio Dire se è vero o falsa la seguente proposizione $a_n \geq 0 \ \forall n$

1) "$\sum_n a_n$ converge $\Rightarrow \sum_n \frac{a_n}{1+a_n^2}$ converge"

2) "$\sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_n \frac{a_n}{1+a_n^2}$ diverge"

dim

1) è VERA: infatti,

$$\begin{cases} a_n \geq \frac{a_n}{1+a_n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \sum_n a_n \text{ converge} \end{cases} \Rightarrow \text{(Teorema Confronto)} \ \sum_n \frac{a_n}{1+a_n^2} \text{ converge}$$

2) $a_n = n^4$ $\quad \sum_n a_n$ diverge

$$\sum_n \frac{a_n}{1+a_n^2} = \sum_n \frac{n^4}{1+n^8} \text{ converge}$$

e quindi la 2) E' FALSA $\qquad$ ■

Esercizio Studiare la convergenza della serie
$$\sum_n (-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

dim

Vediamo la convergenza assoluta $\quad a_n=(-1)^n\cdot\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$$|a_n| = 1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}} = \cancel{1}-\left(\cancel{1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}};\infty\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}};\infty\right)$$

Non posso provare la convergenza assoluta poiché $\sum_n \frac{1}{2n}$ diverge

Devo quindi provare la convergenza con il Criterio di Leibniz. Devo provare che

$$\begin{cases} |a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{ovvio} & a)\\ |a_n|\geq 0 \quad \text{ovvio} & b)\\ |a_{n+1}| \leq |a_n| \quad \forall n\geq 1 \quad \text{vera infatti,} & c)\end{cases}$$

$|a_{n+1}|\leq |a_n| \ \forall n\geq 1$

equivale a $\quad \cancel{1}-\cos\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \cancel{1}-\cos\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n\geq 1$

equivale a $\quad \cos\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \cos\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n\geq 1$

equivale a $\quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n\geq 1 \quad (\cos x \downarrow)$

equivale a $\quad \sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} \quad \forall n\geq 1$ che è VERA

Dunque valgono a), b) e c) e quindi, per il Criterio di Leibniz, la serie a termini di segno alterno converge ∎

Esercizio

Studiare la convergenza di

$$\sum_n \frac{n^{n+1/n}}{\left(n+1/n\right)^n}$$

dim

$$a_n = \frac{(x_n)^{y_n}}{(y_n)^{x_n}} \geq 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n^{n+1/n}}{\left(n+1/n\right)^n}\right)^{1/n} = \frac{n^{1+\frac{1}{n^2}}}{n+1/n} = \frac{n \cdot n^{1/n^2}}{n+1/n} =$$

$$= \frac{n^{1/n^2}}{1+1/n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$ che non mi permette di concludere

però

$$a_n = \frac{n^{n+1/n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{n^n \cdot \sqrt[n]{n}}{n^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}}$$

dunque $a_n \geq \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \geq \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2}} = 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \geq 1 \Rightarrow$ (Cond. Necessaria) $\sum_n a_n$ diverge

$\boxed{\text{M}}$