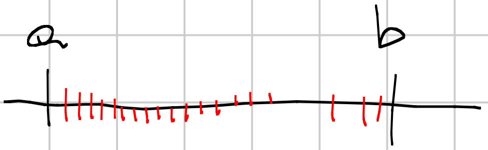
Nella dimostrazione del Teorema di Cauchy si è provato che

1) se $\{a_n\}_n$ è di Cauchy allora $\{a_n\}$ è limitata

→ 2) $\{a_n\}_n$ è limitata allora $\exists \{a_{k_n}\}$ convergente $a_{k_n} \xrightarrow[n]{} l$

3) $\{a_n\}_n$ è di Cauchy allora $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$
$\exists \{a_{k_n}\}$ convergente a $l$

Il punto 2) è il Teorema di Bolzano-Weierstraß




$\{a_n\}_n$ $\quad a \le a_n \le b$ $\quad \forall n$

abbiamo $\infty$ punti che cadono in $[a,b]$

Il Teorema di Bolzano Weierstrass dice che questi $\infty$ punti "si accumulano" da qualche parte

## Verso il Teorema di Bolzano Weierstrass

**Teorema** (Estratte monotone)

Data $\{a_n\}_n$ successione reale
allora $\exists \{a_{k_n}\}_n$ sottosuccessione monotona

dim

$A=\{n\in\mathbb{N} : a_n \le a_k \quad \forall k>n\}$

(se $\{a_n\}$ è crescente allora $A$ è l'insieme di tutti gli indici)

$A\subseteq \mathbb{N}$

Abbiamo 3 casi

① $A=\emptyset$ ② $\#A = m<+\infty$ ③ $\#A=\infty$

Considero il caso ② $\#A=m<+\infty$

$M=\max A$ (esiste poiché $A$ finito!)

$k_1 = M \quad \exists k_2>k_1 \quad k_2\notin A \quad a_{k_2}<a_{k_1}$

$k_2 \quad \exists k_3>k_2 \quad k_3\notin A \quad a_{k_3}<a_{k_2}<a_{k_1}$

$k_3$ $\quad \exists k_4 > k_3 \quad k_k \notin A \quad a_{k_4} < a_{k_3} < a_{k_2} < a_{k_1}$

- - -

ho costruito $\{a_{k_n}\}_n$ strettamente decrescente

① $A = \emptyset$ questione tutto come prima prendendo $k_1 = 0$ il primo termine della successione etc

③ $\# A = \infty \quad A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \exists N = \min A$

$k_1 = N \quad \exists k_2 > k_1 \quad k_2 \in A \quad a_{k_1} \leq a_{k_2}$ (A illimitato)

$k_2 \quad \exists k_3 > k_2 \quad k_3 \in A \quad a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq a_{k_3}$

$k_3 \quad \exists k_4 > k_3 \quad k_4 \in A \quad a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq a_{k_3} \leq a_{k_4}$

- - -

ho costruito $\{a_{k_n}\}_n$ debolmente crescente

Dunque, in ognuno dei casi ① ② e ③, ho costruito una sottosuccessione monotona, che è la tesi ▥

## Teorema (di Bolzano Weierstrass)

$\{a_n\}_n$ successione reale

Se $\{a_n\}_n$ è limitata allora $\exists \{a_{k_n}\}_n \quad a_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$

sottosuccessione convergente

dim

1) Per il Teorema precedente $\exists \{a_{k_n}\}_n$ monotona

2) Essendo $\{a_{k_n}\}_n$ monotona $\exists \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \begin{cases} \inf\{a_{k_n}\} & \text{se } \{a_{k_n}\}_n \downarrow \\ \sup\{a_{k_n}\} & \text{se } \{a_{k_n}\}_n \uparrow \end{cases}$

3) Essendo $a \leq a_n \leq b \ \forall n \Rightarrow a \leq a_{k_n} \leq b \ \forall n$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = l \in [a,b]$

ovvero esiste $\{a_{k_n}\}_n$ convergente ▥

# Teorema (di Weierstrass)

Data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continua $\forall x\in[a,b]$, $[a,b]$ chiuso e limitato intervallo

Allora $\exists\, x_m, x_M \in [a,b]$ : $f(x_m) = \min f([a,b])$

$f(x_M) = \max f([a,b])$

## Controesempio

1) $f: ]0,1] \to \mathbb{R}$ continua non è detto $\exists \max f([a,b])$

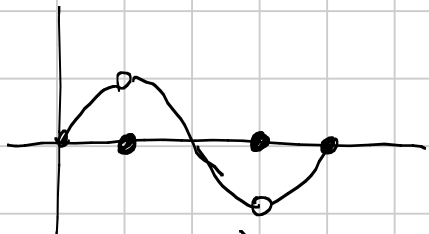
infatti, presa

$f(x) = 1/x$, questa è continua su $]0,1]$ ma

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e quindi $\nexists \max f(]0,1])$

2) $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ non continua non è detto $\exists$

$\min f([0,2\pi])$ $\max f([0,2\pi])$



$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & x\in[0,2\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\} \\ 0 & x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

$\inf f([0,2\pi]) = -1 = \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi} f(x)$ non è un minimo!!

$\sup f([0,2\pi]) = 1 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ " " " massimo!!

dim (Teorema Weierstrass)

Proviamo che $\exists \max f([a,b])$ (Tesi)

Certamente $\exists \sup f([a,b]) = \Lambda$ (in $\mathbb{R}$ $\exists$ sempre l'estremo superiore di un insieme $\neq \emptyset$)

1) $\Lambda \in f([a,b]) \Rightarrow \exists\, x_M \in [a,b] : f(x_M) = \Lambda = \max f([a,b])$

ed ho finito

2) $\Lambda \notin f([a,b])$ $\quad \Lambda = \sup f([a,b]) \Rightarrow \exists \{y_n\}_n \subseteq f([a,b])$

risultato provato precedentemente

$$y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Lambda$$

$$\Rightarrow \exists \{x_n\} \subseteq [a,b] : f(x_n) = y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Lambda$$

ma $\{x_n\}_n$ è limitata $\overset{(B.W)}{\Longrightarrow} \exists \{x_{k_n}\}_n : x_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_M \in [a,b]$

Inoltre si ha, per la continuità di $f$ in $x_M$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) \overset{\text{Teorema}}{=} f(x_M)$$

ma $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Lambda \Rightarrow f(x_{k_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Lambda$

le sottosuccessioni tendono allo stesso limite della successione

$$\Lambda = f(x_M) = \max f([a,b])$$

Analoga dim per l'$\exists$ del minimo $\blacksquare$

# Esercizi Serie Numeriche

## Esercizio

1) Per quali $\alpha$ converge $\sum_n n^\alpha \left[\frac{3}{n} - e^{1/n} \operatorname{sen} \frac{3}{n}\right]$

2) " " " " $\sum_n n^\alpha \left[\frac{3}{n-1} - e^{1/n} \operatorname{sen} \frac{3}{n}\right]$

dim

1) $a_n = n^\alpha \left[\frac{3}{n} - e^{1/n} \operatorname{sen} \frac{3}{n}\right]$ $\qquad \frac{3}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3; 0)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4; 0)$$

$$\Rightarrow e^{1/n} \cdot \operatorname{sen} \frac{3}{n} = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \cdot \left(\frac{3}{n} - \frac{\cancel{27}^{\,9}}{\cancel{6}_{\,2} n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$$

$$= \frac{3}{n} - \frac{9}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) + \frac{3}{n^2} - \frac{9}{2n^4} + \frac{3}{2n^3} + \frac{1}{2n^4}$$

$$= \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} \underbrace{- \frac{3}{n^3} - \frac{4}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)}_{o\left(1/n^2\right)}$$

$$a_n = n^\alpha \left(\cancel{\frac{3}{n}} - \cancel{\frac{3}{n}} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \boxed{-\frac{3}{n^{2-\alpha}}} + o\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right)$$

Preso $\alpha \geq 2$, $a_n$ non è infinitesimo e dunque la serie non converge

Se $\alpha < 2$ allora $a_n \sim -\frac{3}{n^{2-\alpha}}$ $\quad n \to +\infty$

$$\left(\text{infatti } \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{-\frac{3}{n^{2-\alpha}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{-\frac{3}{n^{2-\alpha}}} \cdot (1 + o(1))}{\cancel{-\frac{3}{n^{2-\alpha}}}} = 1\right)$$

Inoltre $\sum_n -\frac{3}{n^{2-\alpha}} = -3 \sum_n \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ converge se $2-\alpha > 1$ se $\boxed{1 > \alpha}$

Dunque, per il criterio del confronto asintotico, $\sum_n a_n$ converge se $1 > \alpha$

2) $a_n = n^\alpha \left[\frac{3}{n-1} - e^{1/n} \operatorname{sen} 3/n\right]$

$= n^\alpha \left[\frac{3}{n-1} - \frac{3}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$

$= 3n^\alpha \left[\frac{n^2 - n(n-1) - n+1}{n^2(n-1)} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$

$= 3n^\alpha \left[\frac{\cancel{n^2} - \cancel{n^2} + \cancel{n} - \cancel{n} + 1}{n^2(n-1)} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$

$= 3n^\alpha \left[\frac{n+n-1}{n^3(n-1)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$

$= \boxed{3 \cdot \frac{2n-1}{n^{3-\alpha}(n-1)}} + o\left(\frac{1}{n^{3-\alpha}}\right)$

$3-\alpha \leq 0$ se $3 \leq \alpha$ allora $\{a_n\}$ non è infinitesima

allora la serie non converge per la cond. Necessaria

Quando $3-\alpha > 0$ allora $a_n \sim 3 \cdot \frac{2n-1}{n^{3-\alpha}(n-1)} \sim \frac{1}{n^{3-\alpha}}$ quando $n \to +\infty$

(infatti $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1/n^{3-\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3 \cdot \frac{2n-1}{n^{3-\alpha}(n-1)} + o\left(\frac{1}{n^{3-\alpha}}\right)}{1/n^{3-\alpha}} =$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^{3-\alpha}}}{\cancel{n^{3-\alpha}}(n-1)} \cdot 3\cdot(2n-1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{3(2n-1)}{n-1} = 6$)

Ma $\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^{3-\alpha}$ converge se $3-\alpha > 1$ se $2 > \alpha$

Per il Criterio del confronto asintotico $\sum_n a_n$ converge se $2 > \alpha$

**Esercizio** Studiare, al variare di $\alpha \geq 0$, la convergenza di:

$$\sum_n \frac{\operatorname{sen} 1/\sqrt{n}}{n^\alpha + \cos 1/n^2}$$

dim

$$\operatorname{sen} x = x + o(x^2; 0) \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n}; \infty\right)$$

$$\cos \frac{1}{n^2} = 1 + o\left(\frac{1}{n^2}; \infty\right)$$

$$a_n = \frac{\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \overbrace{o\left(\frac{1}{n}, \infty\right)}}{\boxed{n^\alpha} + \underbrace{1 + o\left(\frac{1}{n^2}, \infty\right)}} \sim \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}+\alpha} \qquad n \to +\infty$$

ma $\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}$ converge sse $\frac{1}{2}+\alpha > 1$

sse $\alpha > \frac{1}{2}$

Dunque, per il criterio del confronto asintotico, $\sum_n a_n$ converge sse $\alpha > 1/2$ ∎

**Esercizio** Studiare la convergenza di:

1) $\sum_n \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n$ 2) $\sum_n \left(\frac{3n+2}{4n+1}\right)^n$

dim

1) per il criterio $\sqrt[n]{\ }$ si ha

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n} = \frac{4n+1}{3n+2} = \frac{4 + 1/n}{3 + 2/n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 4/3 = L$$

ora $L > 1 \overset{\text{criterio } \sqrt[n]{\ }}{\Longrightarrow} \sum_n a_n$ diverge

2) la fate voi ! ∎