

VENERDÌ 28 ORE 14.30 ÷ 18.30 Aula P Recupero

Teorema di Cauchy

Def Dico che $\{a_n\}_n$ ha limite $\overline{L \in \mathbb{R}}$
(dunque converge) e scriviamo $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$

$$\text{se } \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} > 0 \forall n > \bar{n} \quad L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

Oss Questa def. di limite "è una verifica", ovvero
dato L , posso verificare se questo è il limite
me

questa definizione non mi dice come calcolare L
ancora peggio

date una successione, la definizione di limite
non mi dice se esiste o meno il limite

① Sapere se esiste il limite

② Conoscere un valore di L candidato

③ Verificare con la def. che $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ (*)

Def (successione di Cauchy)

$\{a_n\}_n$ successione reale, questo si dice
"successione di Cauchy" o

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} > 0 : \forall m > \bar{n} \forall n > \bar{n} \quad |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Oss: Questa definizione è anzi simile alla
def. di limite

Qui manca il valore del limite l , che è finito o infinito 2

Teorema (di Cauchy per le successioni)

Dato una successione $\{Q_n\}_n$ numerica sono equivalenti le seguenti affermazioni

1) $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = l \in \mathbb{R}$ (ovvero $\{Q_n\}_n$ converge)

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} > 0 : \forall m > \bar{n} \forall n > \bar{n} \quad |Q_m - Q_n| < \varepsilon$ (ovvero $\{Q_n\}_n$ è di Cauchy)

dim

1) $\Rightarrow$ 2) per i poteri

$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} > 0 : \forall m > \bar{n}$

$l - \varepsilon < Q_m < l + \varepsilon$

ma è anche vero

$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} > 0 : \forall m > \bar{n}$

$l - \varepsilon < Q_m < l + \varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} > 0 : \forall m, n > \bar{n}$

$l - \varepsilon < Q_m < l + \varepsilon$

$-l - \varepsilon < -Q_m < -l + \varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} > 0 : \forall m, n > \bar{n}$

$-2\varepsilon < Q_m - Q_n < 2\varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} > 0 : \forall m, n > \bar{n}$

$|Q_m - Q_n| < 2\varepsilon$

2) $\Rightarrow$ 1)

i) Proviamo che $\{Q_n\}_n$ è limitata: infatti, per i poteri

$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} > 0 : \forall m, n > \bar{n}$

$-\varepsilon < Q_m - Q_n < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\varepsilon = 1 \exists \bar{n} > 0 : \forall m > \bar{n} \quad m = \bar{n} + 1$

$-1 < Q_m - Q_{\bar{n}+1} < 1$

$\Downarrow$

$\varepsilon = 1 \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n}$

$Q_{\bar{n}+1} - 1 < Q_n < 1 + Q_{\bar{n}+1}$

$\Downarrow$

$$\boxed{\exists \bar{m} > 0 : \forall m > \bar{m} \quad |Q_m| < |Q_{\bar{m}+1}| + 1} \quad 3$$

$\Downarrow$

$\uparrow$ è fissato

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N} \quad |Q_m| < \max \{ |Q_{\bar{m}+1}| + 1; |Q_0|; |Q_1|; \dots; |Q_{\bar{m}}| \}}$$

dunque la successione è limitata

ii) (Teorema di Bolzano-Weierstrass)

Dato $\{Q_n\}_n$ limitata allora $\exists \{Q_{k_m}\}_m$ con $\lim_{m \rightarrow +\infty} Q_{k_m} = l \in \mathbb{R}$

iii) Se $\{Q_n\}_n$ è di Cauchy ed $\exists \{Q_{k_m}\}_m$ s.t. $\lim_{m \rightarrow +\infty} Q_{k_m} = l$

$$\text{allora } \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = l$$

le ipotesi sono

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{m}_1 > 0 : \forall m, n > \bar{m}_1$$

$$|Q_m - Q_n| < \varepsilon$$

successione di Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{m}_2 > 0 : \forall m > \bar{m}_2$$

$$|Q_{k_m} - l| < \varepsilon$$

potenziale convergenza

$$\bar{m} = \max \{ \bar{m}_1, \bar{m}_2 \}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{m} > 0 : \forall m, n > \bar{m}$$

$$\begin{cases} |Q_m - Q_n| < \varepsilon & (a) \\ |Q_{k_m} - l| < \varepsilon & (b) \end{cases}$$

ma ci è anche che

$$\begin{aligned} |Q_m - l| &= |Q_m - Q_{k_m} + Q_{k_m} - l| \\ &\leq \underbrace{|Q_m - Q_{k_m}|}_{\varepsilon \text{ (a)}} + \underbrace{|Q_{k_m} - l|}_{\varepsilon \text{ (b)}} \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{m} > 0 : \forall m > \bar{m} \quad k_m > \bar{m} \quad |Q_m - l| < 2\varepsilon$$

$$\text{dunque } \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = l$$

$\square$

OSS: Nel punto B) della dimostrazione abbiamo 4
provato che

$\{O_n\}_n$ di Cauchy + $\{Q_n\}$ convergente $\Rightarrow \{Q_n\}_n$ convergente
più

$\{O_n\}_n$ successione + $\{Q_n\}$ convergente $\nRightarrow \{Q_n\}_n$ convergente
infatti, ci consideri

$$Q_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ è pari} \\ n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\{O_n\}_n = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \dots \right\}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{matrix}$

Osservo che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

ma $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n+1 = +\infty$

dunque $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n !!!$

P.S. la successione sopra costruita non è di
CAUCHY

Esercizio Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza delle serie

$$\sum_m \left(m \operatorname{sen} \left(\frac{1}{m^\alpha} \right) + (2+\alpha)^{-2m} \right)$$

dove

$$Q_m = m \operatorname{sen} \left(\frac{1}{m^\alpha} \right) + (2+\alpha)^{-2m} = b_m + c_m$$

dove $b_m \geq 0$ e $c_m \geq 0 \quad \forall m \geq 1 \quad \forall \alpha \neq -2$

(Il problema è $\lim_m A_m = \lim_m (B_m + C_m) \stackrel{?}{=} \lim_m B_m + \lim_m C_m$)

$$A_m = \sum_{k=1}^m Q_k \quad B_m = \sum_{k=1}^m b_k \quad C_m = \sum_{k=1}^m c_k$$

si può fare poiché sono Tette succ., $\{A_m\}$ & $\{C_m\}$ monotone crescenti e positive!

Vado a studiare $\sum_m m \operatorname{sen} \frac{1}{m^\alpha}$

Osservo che

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m \operatorname{sen} \frac{1}{m^\alpha}}{m \cdot \frac{1}{m^\alpha}} = 1$$

Quando $\alpha > 0$

ovvero

$$m \operatorname{sen} \frac{1}{m^\alpha} \sim \frac{1}{m^{\alpha-1}} \quad \text{per } m \rightarrow +\infty \quad \forall \alpha > 0$$

Insomma $\sum_m \frac{1}{m^{\alpha-1}}$ converge se e solo se $\alpha-1 > 1$
se $\alpha > 2$

$$\text{Studio ora } \sum_m (2+\alpha)^{-2m} = \sum_m \left[\frac{1}{(2+\alpha)^2} \right]^m$$

queste è una serie geometrica di ragione

$$q = \frac{1}{(2+\alpha)^2}, \text{ e quindi converge} \quad 6$$

$$\underline{\text{ne}} \quad -1 < \frac{1}{(2+\alpha)^2} < 1 \quad \underline{\text{ne}} \quad 0 \leq \frac{1}{(2+\alpha)^2} < 1$$

$$\underline{\text{ne}} \quad (2+\alpha)^2 > 1 \quad \underline{\text{ne}} \quad \alpha^2 + 4\alpha + 3 > 0 \quad \alpha_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-3} \begin{matrix} -3 \\ -1 \end{matrix}$$

$$\underline{\text{ne}} \quad \boxed{\alpha < -3 \text{ o } -1 < \alpha}$$

La serie $\sum_n Q_n = \sum_n (C_n + b_n)$ converge

ne convergono $\sum_n C_n$ e $\sum_n b_n$

$$\underline{\text{ne}} \quad \alpha \in]2, +\infty[\cap (]-\infty, -3[\cup]-1, +\infty[)$$

$$\underline{\text{ne}} \quad \alpha \in]2, +\infty[$$

Esercizio Studiare la convergenza di

$$\sum_n \left(\frac{n}{1+n} \right)^{n^2}$$

$$\sum_n \left(\frac{n}{1+n} \right)^{n^2} = \sum_n \left[\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right]^n \quad \text{la serie è a termini positivi}$$

non è una serie geometrica poiché $\left(\frac{n}{n+1} \right)^n$ non è un numero fisso

In questo caso conviene applicare il criterio della radice n -esima poiché ho un elevato a potenza n

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$$

ma $\frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \sum_n \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n^2}$ converge $\square$ 7

Esercizio Studiare, al variare di $\alpha > 0$,
la convergenza della serie $\sum_n (\log n)^{\log \alpha}$
dim

- Se fosse $n^{\log \alpha} = \left(\frac{1}{n}\right)^{-\log \alpha}$ sarebbe una serie

armonica generalizzata, ma con n non è

$$\begin{aligned} - (\log n)^{\log \alpha} &= \left(e^{\log(\log n)}\right)^{\log \alpha} = e^{\log \alpha \cdot \log(\log n)} \\ &= \alpha^{\log(\log n)} \end{aligned}$$

Se fosse α^n , allora una serie geometrica,
ma con n non è

$$Q_n = \alpha^{\log(\log n)}$$

Osservo che, quando $\alpha \geq 1$, la serie non
può convergere e quindi diverge a $+\infty$
(perché i termini positivi)

$$\text{Infatti, } \forall n > 2 \quad \alpha^{\log(\log n)} \leq \alpha^{\log(\log(n+1))}$$

$$\text{quando } \alpha > 1 \quad \alpha^{\log(\log n)} \geq \alpha^{\log(\log 2)}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^{\log(\log n)} \geq \alpha^{\log(\log 2)} > 0$$

$\Rightarrow$ (per la condizione Necessaria) la serie
diverge a $+\infty$ 8

Devo studiare cosa succede quando $0 < \alpha < 1$

$$a_n = (\log n)^{\log \alpha} = \left(\frac{1}{\log n}\right)^{-\log \alpha} = \left(\frac{1}{\log n}\right)^{\beta}$$

con $\beta = -\log \alpha > 0$ (infatti $0 < \alpha < 1$)

ricordo che $(\log n)^{\beta} \ll n \quad \forall \beta > 0$

Proviamo che $\left(\frac{1}{\log n}\right)^{\beta} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n > n_0$
 $\forall \beta > 0$

Lo questo è vero perché

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n}{(1/\log n)^{\beta}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\log n)^{\beta}}{n} = 0^+ \quad \forall \beta > 0$$

$$\left\{ \sum_n \frac{1}{n} \text{ diverge} \right.$$

$$\Rightarrow \sum_n \left(\frac{1}{\log n}\right)^{\beta} \text{ diverge } \forall \beta > 0$$

$$\Rightarrow \sum_n \left(\frac{1}{\log n}\right)^{-\log \alpha} \text{ diverge } \forall \alpha \in]0, 1[\quad \square$$

Esercizio Studiare la convergenza di

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2 - n \alpha \ln n} = \sum_n |a_n|$$

dim

$$n^2 - n \alpha \ln n = n(n - \alpha \ln n) > 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{infatti, } n=1 \quad 1(1-\alpha_n) > 0$$

9

$$\text{e per } n > 1 \quad n(n-\alpha_n) \geq n(n-1) > 0$$

Quindi studio la serie per $n \geq 1$

È una serie a termini di segno alternato
dunque posso studiarla con il criterio di Leibniz

$$\bullet \frac{1}{n^2 - n\alpha_n} > 0 \quad \forall n \geq 1 \quad (\text{vero})$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 - n\alpha_n} = 0 \quad (\text{vero})$$

$$\bullet \frac{1}{(n+1)^2 - (n+1)\alpha_{n+1}} < \frac{1}{n^2 - n\alpha_n} \quad (\text{vero})$$

$$\Downarrow$$

$$(n+1)^2 - (n+1)\alpha_{n+1} > n^2 - n\alpha_n$$

$$\cancel{n^2} + 2n + 1 - (n+1)\alpha_{n+1} > \cancel{n^2} - n\alpha_n$$

$$\underbrace{(n+1)(1-\alpha_{n+1}) + n}_{> 0} > \underbrace{-n\alpha_n}_{< 0} \quad \text{vero}$$

la serie converge per il Criterio di Leibniz

In alternativa si può osservare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2 - n\alpha_n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 - n\alpha_n} = 1 \quad (*)$$

avrei provato che

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{(-1)^n}{n^2 - n\alpha_n} \right| \sim \frac{1}{n^2} \text{ per } n \rightarrow +\infty \quad (*) \\ \sum_n \frac{1}{n^2} \text{ converge (questo è noto!)} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \sum_n |a_n| \text{ converge} \\ \text{conv. assoluta}$$

$$\Downarrow \\ \sum_n a_n \text{ converge} \quad \square$$