$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad x \in \mathbb{R}$$

**Teorema (continuità della f.ne inversa)**

Data $f: I \to f(I)$ $I$ intervallo *
- $f$ strettamente crescente (decrescente) *
- $f$ continua $\forall x \in I$ *

Allora $\exists\, g: f(I) \to I$ strettamente crescente
continua $\forall y \in f(I)$

e $g(y) = f^{-1}(y)$ è detta funzione inversa di $f$
e soddisfa le seguenti identità

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in I$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in f(I)$$

Data $f(x) = e^x$ $\quad f: \mathbb{R} \to ]0, +\infty[$
$f(x) = e^x$ è strettamente crescente
$f(x) = e^x$ è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$

Allora $\exists\, g(y) = f^{-1}(y) = \log_e(y)$ funzione inversa di $e^x$

che è strettamente crescente su $]0, +\infty[$
" " continua $\forall x \in ]0, +\infty[$
e soddisfa $\log_e(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$e^{\log_e(y)} = y \quad \forall y \in ]0, +\infty[$$

1) $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\log x = \begin{cases} < 0 & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ > 0 & 1 < x \end{cases}$$

segue dal fatto che $\log x$ è strettamente crescente e dal fatto che $\log 1 = 0$

2

2) $e^0 = 1 \longrightarrow \log 1 = 0$

3) $e^x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow \log y \leq y - 1 \quad \forall y \in ]0, +\infty[$

$\downarrow$

pongo $x = \log y$ e ottengo

$e^{\log y} = y \geq 1 + \log y \quad \forall y > 0$

4) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \longrightarrow \log(x \cdot y) = \log x + \log y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$

$$e^{\log(x \cdot y)} = e^{\log x + \log y}$$

$$\Updownarrow$$

$$x \cdot y \overset{4)}{=} e^{\log x} \cdot e^{\log y} = x \cdot y \quad \checkmark$$

5) $e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow \log y = -\log \frac{1}{y} \quad \forall y > 0$

$$\Updownarrow$$

$$e^{\log y} = e^{-\log \frac{1}{y}} \quad \forall y > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$y = \frac{1}{e^{\log \frac{1}{y}}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y \quad \forall y > 0$$

6) $e^x \uparrow$ in $\mathbb{R} \longrightarrow \log y \uparrow$ in $]0, +\infty[$

7) $e^x \leq 1 + x e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow \frac{y-1}{y} \leq \log y \quad \forall y > 0$

$\downarrow$

$x = \log y$ la 7) diventa

$y \leq 1 + \log y \cdot y \quad \forall y > 0$

$\downarrow$

$\frac{y-1}{y} \leq \log y \quad \forall y > 0$

8) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \longrightarrow \lim_{y\to+\infty} \log y = +\infty$

$$\lim_{y\to+\infty} \log y \underset{y=e^x}{=} \lim_{x\to+\infty} \log e^x = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

9) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \longrightarrow \lim_{y\to0^+} \log y = -\infty$

$$\lim_{y\to0^+} \log y \underset{z=1/y}{=} \lim_{z\to+\infty} \log \frac{1}{z} = -\lim_{z\to+\infty} \log z = -\infty$$

10) $e^x$ continua $\forall x\in\mathbb{R} \longrightarrow \log y$ è continua $\forall y>0$ (segue dal Teorema)

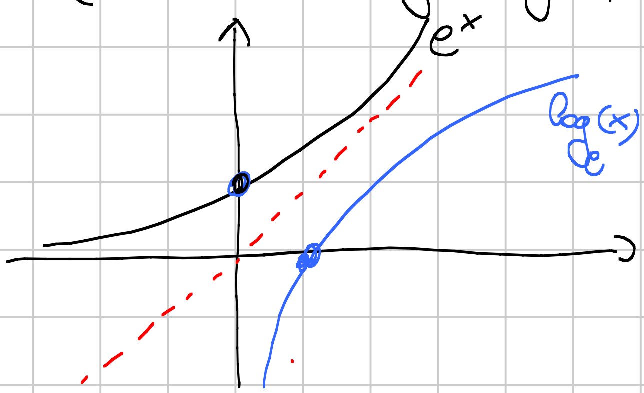
11) $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \longrightarrow \lim_{y\to0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$

$$1 = \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} \underset{y=e^x-1}{=} \lim_{y\to0} \frac{y}{\log(1+y)}$$

passando al reciproco

12) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty \ \forall k>0 \longrightarrow \lim_{y\to+\infty} \frac{\log y}{y^k} = 0 \quad \forall k>0$

$$(x,y)\in \operatorname{graf}(e^x) \iff (y,x)\in \operatorname{graf}(\log x)$$



# POTENZA A ESPONENTE REALE

$3^2 \doteq 3 \cdot 3 \qquad 3^3 \doteq 3^2 \cdot 3 \quad \cdots \quad 3^m$

Però non è ancora chiaro cosa si intende per $3^{\sqrt{2}}$

$$3^{\sqrt{2}} \overset{?}{=} e^{\sqrt{2} \cdot \log 3}$$

**Def** (potenza a esponente reale)

Dato $x > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definiamo $x^\alpha$ nel modo seguente

$$x^\alpha \equiv e^{\alpha \log_e x}$$

**Oss:** Perché questa definizione? Segue dalla osservazione che

$$x^\alpha = e^{\log_e (x^\alpha)} = e^{\alpha \log_e x}$$

$\log x$ è la funzione inversa di $e^x$

proprietà del logaritmo $\log_e x^\alpha = \alpha \log_e x$

# Serie a Termini di segno qualsiasi

## Def (convergenza assoluta)

Data $\sum_n a_n$ serie numerica, diciamo che questa "converge assolutamente" se $\sum_n |a_n|$ converge

**Esempio** $\sum_n \frac{\sin(n)}{n^2}$ converge assolutamente

infatti $|a_n| = \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$

ma $\sum_n 1/n^2$ converge e $\sum_n |a_n|$ è a termini positivi

$\Rightarrow \sum_n |a_n|$ converge

**Oss:** data $\sum_n a_n$, in generale il segno di $a_n$ non è sempre lo stesso, ovvero non ho in generale una serie a termini positivi (o negativi) e dunque non posso applicare i risultati ottenuti per le serie a termini positivi

MA $\sum_n |a_n|$ $\underline{\underline{\text{è}}}$ a termini positivi e dunque posso applicare a $\sum_n |a_n|$ i risultati sopracitati

**Pb:** Che legame c'è tra convergenza assoluta e convergenza?

## Teorema (Convergenza Assoluta)

Data $\sum_n a_n$ serie numerica

Se $\sum_n |a_n|$ converge allora $\sum_n a_n$ converge

dim

Ricordiamo che $|x+y| \leq |x|+|y|$

dunque $|a_{n+k}+a_{n+k-1}+\dots+a_n| \leq |a_{n+k}|+\dots+|a_n|$

$\sum_n |a_n|$ converge, per il criterio Cauchy si ha

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 : \forall n>\bar{n} \ \forall k \in \mathbb{N} \ \big||a_{n+k}|+\dots+|a_n|\big|<\varepsilon$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad |a_{n+k}|+\dots+|a_n|<\varepsilon \\ \text{ma} \quad |a_{n+k}+\dots+a_n| \leq |a_{n+k}|+\dots+|a_n| \end{cases}$$

$\Longrightarrow \ \forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 \ \forall n>\bar{n} \ \forall k \in \mathbb{N} \ |a_{n+k}+\dots+a_n|<\varepsilon$

e per il criterio di Cauchy ottengo che
$\sum_n a_n$ converge $\blacksquare$

**Esempio** $\sum_n \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$ converge assolutamente
e quindi converge

**Problema** Convergenza $\Rightarrow$ Convergenza Assoluta?

NO: infatti

$\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge mentre $\sum_n \underbrace{\left|(-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right|}_{\text{"}}$

# SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNO

**Def** Una serie $\sum_n b_n$ si dice "a termini di segno alterno se $b_n \cdot b_{n+1} \leq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

**Esempio** $\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

# Teorema (Criterio di Leibniz)

Data $\sum_n (-1)^n \cdot a_n$ che soddisfa le seguenti ipotesi

1) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Allora $\sum_n (-1)^n \cdot a_n$ converge

**Oss** La serie "modello" è $\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}$

$S_0 = 1 \qquad\qquad S_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\vee \qquad\qquad \wedge$

$S_2 = S_1 + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \qquad\qquad S_3 = S_2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

$\vee \qquad\qquad \wedge$

$S_4 = S_3 + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} \qquad\qquad S_5 = S_4 - \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$

$\vee \qquad\qquad \wedge$

$S_6 \qquad\qquad S_7$

$\vee \qquad\qquad \wedge$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$S_{2n} \qquad\qquad S_{2n+1}$

Inoltre $S_{2n} - S_{2n-1} = \frac{1}{2n+1}$, ovvero i due limiti vengono a coincidere

**dim**

Osserviamo che $a_n \downarrow \Rightarrow a_{2n+1} - a_{2n} \geq 0$

come pure $a_{2n} - a_{2n-1} \geq 0$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot a_k$$

$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cdot a_k = \sum_{k=0}^{2n-2} (-1)^k \cdot a_k - a_{2n-1} + a_{2n}$$

$$= S_{2n-2} - \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\geq 0} \leq S_{2n-2}$$

dunque $S_{2n}$ è decrescente e $S_{2n} \leq S_0 = a_0 \ \forall n$

- $S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \cdot a_k = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \cdot a_k + \underbrace{(a_{2n} - a_{2n+1})}_{\geq 0}$

$$= S_{2n-1} + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq S_{2n-1}$$

dunque $S_{2n+1}$ è crescente e $S_1 \leq S_{2n+1} \quad \forall n$

- Inoltre $S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k - a_{2n+1}$

$$= S_{2n} - a_{2n+1} \geq S_{2n}$$

Riassumendo $S_1 \leq S_{2n}, \; S_{2n+1} \leq S_0 \quad \forall n$

$S_{2n}$ decrescente e $S_{2n+1}$ crescente

Allora $\exists \; \ell_p = \lim_{n \to +\infty} S_{2n} \in [S_1, S_0]$

$\ell_d = \lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} \in [S_1, S_0]$

ma $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}$

e dunque

$$\lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} = \ell_d = \lim_{n \to +\infty} S_{2n} - \lim_{n \to +\infty} a_{2n+1}$$

$$= \ell_p + 0$$

$\Rightarrow \ell_d = \ell_p = S$ in quanto $\{S_{2n}\} \cup \{S_{2n+1}\} = \{S_n\}$

$\boxed{///}$

Esercizio Studiare la convergenza di

$$\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{per} \quad 0 < \alpha \leq 1$$

dim

$\sum_n (-1)^n \cdot a_n$ dove $a_n = 1/n^\alpha$

- $a_n \geq 0 \quad \forall n \quad \forall \alpha \in ]0, 1]$ VERO!!

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha \in ]0,1]$
- $(n+1)^\alpha > n^\alpha \quad \forall n \geq 1 \quad \forall \alpha \in ]0,1]$

dunque

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} < \frac{1}{n^\alpha} \quad \forall n \geq 1 \quad \forall \alpha \in ]0,1]$$

ovvero $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \geq 1 \quad \forall \alpha \in ]0,1]$ Vero!!

$\Rightarrow$ per il criterio di Leibniz $\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\forall \alpha \in ]0,1]$

Esempio $\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ studiare la convergenza

- $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$
- $\lim_{n\to+\infty} 1/\sqrt{n} = 0$
- $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow$ Criterio di Leibniz: $\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge

mentre

$$\sum_n \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \sum_n 1/\sqrt{n} \quad \text{NON converge}$$

(in quanto $\sum_n 1/n^\alpha$ diverge a $+\infty$ $\forall \alpha \leq 1$)

$$0,\bar{9} \stackrel{?}{=} 1$$

$$0,\bar{9} = 0,999999 \ldots 9 \ldots$$

$$1 - 0,\bar{9} = 0,00000 \ldots 0 \ldots \quad ?!$$

Proviamo che $0,\bar{9} = 1$

Infatti,

$$0,\bar{9} = 0,99\dots9\dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \dots + \frac{9}{10^n} + \dots$$

$$= \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots\right)$$

$$= \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \qquad \left|\frac{1}{10}\right| < 1$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9/10} = 1$$

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots3\dots = 0,\bar{3}$$

$$0,\bar{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \dots = \frac{3}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \dots\right)$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{9/10} = \frac{1}{3}$$

**Domanda** Perché vogliamo proprio se una serie converge?

$$\sum_n a_n \qquad \sum_{k=0}^{100!} a_k$$

Se $\sum_n a_n$ è convergente

allora $\exists\, S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \in \mathbb{R}$

allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad \left|S - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| < \varepsilon$

Però, calcolando 100 termini, in generale non so con che grado di precisione approssimo la somma

Per le serie del tipo $\sum_n (-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$ convergenti si prova che

$$|S - S_{2n}| \leq a_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|S - S_{2n+1}| \leq a_{2n+1} \quad \text{"}$$

$$S_1 \leq S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \leq S_0$$

$$\Downarrow$$

$$-a_{2n+1} \leq S - S_{2n} \leq 0$$

$$|S - S_{2n}| \leq a_{2n+1}$$

$$0 \leq S - S_{2n+1} \leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}$$

$$|S - S_{2n+1}| \leq a_{2(n+1)}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

$$|S - S_{100}| \leq \frac{1}{101}$$