2014-11-17 - Lezione 29

Def: $\sum_n a_n$ "serie numerica di termine generale a_n"

e si intende

$$\boxed{\sum_n a_n \equiv \{S_n\}_n} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ ridotta (somma) parziale n-esima}$$

Oss: Serie $\equiv$ Successione somme parziali

$$\text{Somma della serie } (\text{se } \exists) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

NON si confonda

$\sum_n a_n \equiv \{S_n\}_n$ serie (che è una successione di n.ri)

con

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S$ (se $\exists$) somma della serie (che è un numero $\in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$)

Esempio $\sum_n (-1)^n$ è una serie di termine generale $(-1)^n$

MA $\nexists \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$

CONDIZIONE NECESSARIA (di convergenza $\sum_n a_n$)

Data $\sum_n a_n \equiv \{S_n\}_n \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

Se $\sum_n a_n$ $\boxed{\text{converge}}$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

dim

Per ipotesi esiste $S = \lim_{n\to+\infty} S_n \in \mathbb{R}$

allora esiste pure $\lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$ (è una estratta)

Ma allora

$$\lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) = \underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} a_n}}$$

|| limite somma = somma limiti

$$\lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1}$$

||

$$S - S = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad \blacksquare$$

OSS: Utilizzeremo spesso la contronominale della Condizione Necessaria, cioè:

"$\sum_n a_n$ serie numerica; se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$

allora $\sum_n a_n$ non converge"

Esempio Studiare la convergenza di $\sum_n \frac{n}{n+1}$

dim

In questo caso $a_n = \frac{n}{n+1}$ e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+1/n} = \frac{1}{1+0^+} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ (Cond. Necessaria) $\sum_n \left(\frac{n}{n+1}\right)$ non converge $\blacksquare$

(vedremo tra pochissimo che diverge a $+\infty$)

Teorema (Criterio di Cauchy per $\sum_n a_n$)

Sia data $\sum_n a_n$. Sono tra loro equivalenti

i) $\sum_n a_n$ converge

ii) $\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}=\bar{n}(\varepsilon)>0 : \forall n>\bar{n} \ \forall k\in\mathbb{N} \ |S_{n+k}-S_n|<\varepsilon$

ovvero

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}=\bar{n}(\varepsilon)>0 : \forall n>\bar{n} \ \forall k\in\mathbb{N} \ |a_{n+k}+a_{n+k-1}+\dots+a_{n+1}|<\varepsilon$

ovvero $\forall \varepsilon>0$ " " " $|a_{n+k}+\dots+a_n|<\varepsilon$

Esempio (Molto Importante)

$\sum_n 1/n$ non converge

dim

$$\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}+\dots+\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{2n} = n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

ho scoperto che

$$\sum_{k=n+1}^{2n} 1/k \geq 1/2 \quad \forall n\in\mathbb{N} \ n\geq 1$$

dunque

$\exists \varepsilon = 1/2 : \forall \bar{n}>0 \ \exists n=\bar{n}+1 \ \exists k=\bar{n}-1 : |a_{n+k}+\dots+a_n| \geq 1/2$

" " " " $: \left|\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{n+1}\right| \geq 1/2$

ovvero abbiamo provato che

$$\text{non}\left(\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}: \forall n>\bar{n}\ \forall k\in\mathbb{N}\ |a_{n+k}+\dots+a_n|<\varepsilon\right)$$

e quindi **non** vale la ii) del Criterio di Cauchy, e quindi la serie **non** converge. $\boxed{\text{///}}$

Esempio ($\sum_n a_n$ non converge e $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$)

Data la serie $\sum_n 1/n$, questa serie

- è non convergente (vedi esempio precedente).
- $\lim_{n\to+\infty} 1/n = 0$

Oss: Data $\sum_n a_n$, l'esempio precedente ci dice che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_n a_n \text{ converge}$$

Esempio Calcolare, se esiste, $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

dim

$$S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{4}-\cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{n+2}$$

$$S = \sum_{k=3}^{\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{4} \qquad \boxed{\text{///}}$$

Esercizio Calcolare, se esiste, $\displaystyle\sum_{k=5}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

dim

$$S_n = \sum_{k=5}^{n} a_k = \sum_{k=5}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=5}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{6}-\cancel{\frac{1}{7}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{8}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{6}-\frac{1}{n+2}$$

$$\sum_{k=5}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{6} \qquad \boxed{\text{///}}$$

Serie a Termini Positivi

Nota: Tutto quello che si dice per $\sum_n a_n$ $a_n \geq 0$ lo si può trasportare alle serie $\sum_n b_n$ con $b_n \leq 0$

Def: Una serie numerica $\sum_n a_n$ si dice "a termini positivi" se $a_n \geq 0 \ \forall n$

Oss: I primi $10^{100^{100}}$ termini (i primi n) non influiscono sulla convergenza della serie in esame, ovvero

$$\sum_n a_n \quad e \quad \sum_{n \geq \bar{n}} a_n$$

hanno lo stesso carattere

Esempi $\sum_{n \geq 1} 1/n$ è a termini positivi

$\sum_{n \geq 0} \operatorname{sen} n$ <u>non</u> è a termini positivi

Teorema ($\sum_n a_n$ $a_n \geq 0$ converge o diverge)

$\sum_n a_n$ serie numerica a termini positivi

Allora $\exists \lim_{n \to +\infty} S_n = \sup_n S_n = \begin{cases} +\infty \\ \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

dim

$$S_0 = a_0 \underset{\uparrow a_1 \geq 0}{\leq} (a_0 + a_1) = S_1 \underset{\uparrow a_2 \geq 0}{\leq} a_2 + S_1 = S_2 \leq a_3 + S_2 \leq \dots \underset{\uparrow a_n \geq 0}{\leq} a_n + S_{n-1} = S_n$$

quindi $\{S_n\}_n$ è debolmente crescente

$\Rightarrow$ (Teorema successioni monotone) $\exists \lim_{n \to +\infty} S_n = S = \sup\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$

e dunque, dato che $\sup\{S_n : n \in \mathbb{N}\} = \begin{cases} +\infty \\ \in \mathbb{R} \end{cases}$

si ha la Tesi $\square$

Oss: $\sum_n \frac{n}{n+1}$ si era visto che <u>non converge</u>

ma $\frac{n}{n+1} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \sum_n \frac{n}{n+1}$ diverge a $+\infty$

Analogamente

$\sum_n 1/n$ si è visto che <u>non converge</u>

ma $1/n > 0 \ \forall n \geq 1 \quad \Rightarrow \sum_n 1/n$ diverge a $+\infty$

Teorema (Criterio del Confronto)

$\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ serie numeriche tali che

1) $a_n, b_n \geq 0 \quad \forall n \geq \bar{n}$
2) $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq \bar{n}$

i) $\sum_n a_n$ diverge a $+\infty \Rightarrow \sum_n b_n$ diverge a $+\infty$

ii) $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge

dim

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

$$A_n = A_{\bar{n}} + \sum_{k=\bar{n}+1}^{n} a_k \leq A_{\bar{n}} + \sum_{k=\bar{n}+1}^{n} b_k = A_{\bar{n}} + (B_n - B_{\bar{n}})$$

$$= (A_{\bar{n}} - B_{\bar{n}}) + B_n \qquad \forall n$$

ho scoperto che

$A_n \leq (A_{\bar{n}} - B_{\bar{n}}) + B_n \ \forall n$

inoltre so che (sono serie a termini positivi)

$\exists \lim_{n\to+\infty} A_n \begin{cases} +\infty \\ \text{o} \\ \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\exists \lim_{n\to+\infty} B_n \begin{cases} +\infty \\ \text{o} \\ \in \mathbb{R} \end{cases}$

Per il Teorema del confronto per le successioni

$A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} B \in \mathbb{R} \Rightarrow A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A \in \mathbb{R}$ ▯

Teorema (Criterio confronto - 2° forma)

$\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ serie numeriche

1) $a_n, b_n \geq 0 \quad \forall n > \bar{n}$, $b_n > 0 \ \forall n$
2) $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$!!!

1) $\sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ diverge

2) $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ converge

dim

Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n > n_0 \quad 0 \leq \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$

allora, fissato $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 > 0 : \forall n > n_0 \quad 0 \leq a_n < b_n$

Posto $n_1 = \max\{n_0, \bar{n}\}$ si ha che

- (per ipotesi) $a_n, b_n \geq 0 \quad \forall n \geq n_1$
- (vedi sopra) $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_1$

$\Rightarrow$ vale la tesi del teorema precedente ///

Teorema (Criterio del confronto asintotico)

$\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ serie numeriche t.c.

1) $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq \bar{n}$, $b_n > 0 \ \forall n \geq \bar{n}$
2) $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in]0, +\infty[$

Sono tra loro equivalenti

i) $\sum_n a_n$ converge (diverge a $+\infty$)
ii) $\sum_n b_n$ converge (" " $+\infty$)

dim

2) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 > 0 : \forall n > n_0 \quad \ell - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \ell + \varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0 \ \exists n_0 > 0 : \forall n > n_0 \quad \frac{\ell}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3\ell}{2} \cdot b_n$

$\exists n_1 = \max\{n_0, \bar{n}\}$ t.c.

$\forall n > n_1 \quad \begin{cases} a_n \geq 0, \ b_n > 0 \\ \frac{\ell}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2}\ell \cdot b_n \end{cases}$

A) $\sum_n a_n$ converge, $\forall n > n_1$ $(a_n, b_n \geq 0)$ e $\left(\frac{\ell}{2} b_n < a_n\right)$

$\Rightarrow$ (criterio confronto) $\sum_n b_n$ converge

B) $\sum_n a_n$ diverge, $\forall n > n_1$ $(a_n, b_n \geq 0)$ e $\left(a_n < \frac{3\ell}{2} b_n\right)$

$\Rightarrow$ (criterio confronto) $\sum_n b_n$ diverge

C) $\sum_n b_n$ converge $\forall n > n_1$ $(a_n, b_n \geq 0)$ e $\left(a_n < \frac{3\ell}{2} b_n\right)$

$\Rightarrow$ (criterio confronto) $\sum_n a_n$ converge

D) $\sum_n b_n$ diverge $\forall n > n_1$ $(a_n, b_n \geq 0)$ e $\left(\frac{\ell}{2} b_n < a_n\right)$

$\Rightarrow$ (criterio confronto) $\sum_n a_n$ diverge ////

Esercizio (IMPORTANTE)

$\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge per $\alpha \geq 2$

diverge per $\alpha \leq 1$

NOTA BENE resta da provare che $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge per $1 < \alpha < 2$, ma utilizzeremo confronto con l'integrale improprio

dim

Proviamo che $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ diverge per $\alpha \leq 1$

Osserviamo che $n^\alpha \leq n$ $\forall \alpha \leq 1$ $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow$ $\left[\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha} \ \forall \alpha \leq 1 \ \forall n \geq 1\right]$ & $\left[\sum_n \frac{1}{n} \text{ diverge a } +\infty\right]$

$\Rightarrow$ per il criterio del confronto $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ diverge a $+\infty$ $\forall \alpha \leq 1$

Proviamo che $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\alpha \geq 2$

Noi sappiamo che $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$ converge

" " " $\lim_{n\to+\infty} \frac{1/n^2}{1/n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (Criterio Confronto Asintotico) $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge

Ma $n^2 \leq n^\alpha \quad \forall \alpha \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

dunque $\boxed{\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall \alpha \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \neq 0}$

$\boxed{\sum_n \frac{1}{n^2} \text{ converge}}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (Criterio Confronto) $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\forall \alpha \geq 2$ ▥

Esempio Studiare la convergenza di $\sum_n \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$

dim

$a_n = \operatorname{sen} \frac{1}{n^2} > 0 \quad \forall n \geq 1 \quad \left(0 < \frac{1}{n^2} < \frac{\pi}{2} \quad \forall n \geq 1\right)$

Quindi la serie è a termini positivi •

Ricordo $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/n^2}{1/n^2} = 1$ • $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (Criterio Confronto Asintotico) $\sum_n \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$

si comporta come $\sum_n \frac{1}{n^2}$

Ma $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_n \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$

converge ▥

Esempio Studiare la convergenza di

$$\sum_n n^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{n^2} \quad \text{al variare di } \alpha > 0$$

dim

$a_n = n^\alpha \operatorname{sen} 1/n^2 > 0 \quad \forall n \geq 1$, ovvero a termini positivi (A)

Affermo che $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{\left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha}} = 1}$ (B)

infatti $\lim_{n\to+\infty} \cancel{n^\alpha} \cdot \operatorname{sen} 1/n^2 \cdot \dfrac{n^2}{\cancel{n^\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} 1/n^2}{1/n^2} = 1$

Inoltre $\boxed{\sum_n \dfrac{1}{n^{2-\alpha}} \text{ converge } \underline{\text{se}} \ 2-\alpha > 1 \quad \underline{\text{se}} \ 1 > \alpha}$ (C)

Per il criterio Confronto Asintotico (valgono (A) (B) e (C)) si ha che

$\sum_n n^\alpha \operatorname{sen} 1/n^2$ converge $\underline{\text{se}}$ $\alpha < 1$ ///

Oss: la serie armonica generalizzata

$\sum_n 1/n^\alpha$ converge se $\alpha > 1$

dunque

$\sum_n \dfrac{1}{n^{2-\beta}}$ converge $\underline{\text{se}}$ $2-\beta > 1$

$\underline{\text{se}}$ $1 > \beta$

Teorema (Criterio Radice n-esima)

$\sum_n a_n \quad a_n \geq 0 \quad \exists \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}$

1) $0 \leq l < 1 \implies \sum_n a_n$ converge

2) $1 < l \implies \sum_n a_n$ diverge a $+\infty$