Teorema (limiti di funzioni via limiti successioni)

$f: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A. Sono equivalenti tra loro

i) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \boxed{\ell} \in \overline{\mathbb{R}}$

ii) $\forall \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ $\left[\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \boxed{\ell} \right]$

Oss: i) $\Rightarrow$ ii) è molto importante perché permette di dedurre da un limite di funzione un limite di successioni ovvero

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Rightarrow \text{presa } x_n = \frac{n}{n^2+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \text{ si ha}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)}{\frac{n}{n^2+1}} = 1$$

i) $\Rightarrow$ ii si usa per fare dei controesempi in quanto

se $\exists\, x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$ e $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$ con $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \to +\infty} f(y_n)$

allora $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

Esempio Provare che $\nexists \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$

dim

Utilizzo il Teorema precedente

prendo $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ inoltre $\lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen}(x_n) =$

$= \lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n\right) =$

$= \lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$

$\nparallel$

d'altra parte $y_n = \frac{3}{2}\pi + 2\pi n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ ma $\lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen}(y_n) =$

$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi n\right)$

$= \lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$

Allora $\nexists \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$

dim (facoltativa, solo nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$)

i) $\Rightarrow$ ii)

Per ipotesi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Prendiamo $\{a_n\}_n \subseteq A \setminus \{x_0\}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = x_0$, cioè

$\forall \delta > 0 \ \exists \bar{N} = \bar{N}(\delta) : \forall n > \bar{N} \ 0 < |a_n - x_0| < \delta$

$\uparrow a_n \neq x_0$!!

Allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \exists \bar{N} = \bar{N}(\delta) : \forall n > \bar{N} \quad 0 < |a_n - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(a_n) - \ell| < \varepsilon$

Allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{N} > 0 : \forall n > \bar{N} \quad |f(a_n) - \ell| < \varepsilon$

ii) $\Rightarrow$ i) Per assurdo $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ovvero

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists a_\delta \in A \quad 0 < |x_0 - a_\delta| < \delta$ e $|f(a_\delta) - \ell| \geq \varepsilon_0$

$\Downarrow$

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall N > 0 \ \exists a_N \in A \quad 0 < |x_0 - a_N| < 1/N$ e $|f(a_N) - \ell| \geq \varepsilon_0$

ma allora abbiamo trovato $\{a_N\}_N \subseteq A$ tale che

$\lim_{N \to +\infty} a_N = x_0$ e $\lim_{N \to +\infty} f(a_N) \neq \ell$

ASSURDO

$\blacksquare$

Teorema (continuità di funzioni via limiti successioni)

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, p.d.a. per A. Sono equivalenti tra loro

i) f continua in x_0 (cioè $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$)

ii) $\forall \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ $\left[\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)\right]$

Teorema (x^* p.d.a. per $A \Rightarrow \exists \{x_n\} \subseteq A : \lim_{n \to +\infty} x_n = x^*$)

$A \subseteq \mathbb{R}$, sia $x^* \in \overline{\mathbb{R}}$ p.d.a. per A.

Allora $\exists \{x_n\} \subseteq A$: $\lim_{n \to +\infty} x_n = x^*$

Oss: Sappiamo che x^* p.d.a. per $A \Rightarrow \exists \infty$ punti di A in ogni intorno di x^*

dim (cenni)

$\boxed{x^* = +\infty}$ p.d.a. per $A \Rightarrow \forall M \in \mathbb{R}$ $\;]M, +\infty[\cap A \neq \emptyset$

prendo $N_0 = 0$ $\Rightarrow$ $\exists x_0 \in]0, +\infty[\cap A$

prendo $N_1 = \lfloor x_0 \rfloor + 1$ $\Rightarrow$ $\exists x_1 \in]N_1, +\infty[\cap A$ $\quad x_1 \neq x_0$

prendo $N_2 = \lfloor x_1 \rfloor + 1$ $\Rightarrow$ $\exists x_2 \in]N_2, +\infty[\cap A$ $\quad x_2 \neq x_1 \neq x_0$

– – –

in questo modo, per induzione, costruisco una successione $\{x_n\}_n \subseteq A$: $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$

$\boxed{x^* = -\infty}$ è p.d.a. per $A \Rightarrow \forall N \in \mathbb{R}$ $\;]-\infty, N[\cap A \neq \emptyset$

dunque

fisso $N_0 = 0$ $\Rightarrow \exists x_0 \in]-\infty, N_0[\cap A$

$N_1 = -\lfloor x_0 \rfloor - 1 \Rightarrow \exists x_1 \in]-\infty, N_1[\cap A$ $\quad x_1 \neq x_0$

$N_2 = -\lfloor x_1 \rfloor - 1 \Rightarrow \exists x_2 \in]-\infty, N_2[\cap A$ $\quad x_2 \neq x_1 \neq x_0$

$N_3 = -\lfloor x_2 \rfloor - 1 \Rightarrow \exists x_3 \in]-\infty, N_3[\cap A$ $\quad x_3 \neq x_2 \neq x_1 \neq x_0$

Abbiamo costruito $\{x_n\}_n \subseteq A$ $\quad x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^*$

$\boxed{x^* \in \mathbb{R}}$ pda per $A \Rightarrow \forall \delta > 0 \quad (]x^*-\delta, x^*+\delta[\cap A) \setminus \{x^*\} \neq \emptyset$

fisso $\delta_0 = 1 \Rightarrow \exists x_0 \in (]x^*-\delta_0, x^*+\delta_0[\cap A) \setminus \{x^*\}$

$\vee$

$\delta_1 = \min\{\frac{1}{2}; |x^*-x_0|\} \Rightarrow \exists x_1 \in (]x^*-\delta_1, x^*+\delta_1[\cap A) \setminus \{x^*\}$

$\vee \qquad x_1 \neq x_0$

$\delta_2 = \min\{\frac{1}{3}; |x^*-x_1|\} \Rightarrow \exists x_2 \in (]x^*-\delta_2, x^*+\delta_2[\cap A) \setminus \{x^*\}$

$\vee \qquad x_2 \neq x_1 \neq x_0$

$\delta_3 = \min\{\frac{1}{4}; |x^*-x_2|\} \Rightarrow \exists x_3 \in (]x^*-\delta_3, x^*+\delta_3[\cap A) \setminus \{x^*\}$

....

$\delta_N = \min\{\frac{1}{N+1}; |x^*-x_{N-1}|\} \Rightarrow \exists x_N \in (]x^*-\delta_N, x^*+\delta_N[\cap A) \setminus \{x^*\}$

Abbiamo così costruito $\{x_n\}_n \subseteq A : \lim_{n \to +\infty} x_n = x^*$ $\blacksquare$

SERIE NUMERICHE

Problema: sommare ∞ termini!

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+1\dots\dots = 0$$

$$1(-1+1)(-1+1)(-1+1)(-1+1)\dots\dots = 1$$

Dove è il problema? Il problema è che la proprietà associativa vale per un numero finito di termini

Quando sommo per esempio 6 termini, ho 6! modi di fare questa somma, poichè 6! è il numero di ordini possibili per 6 elementi

Dati 1000 termini, ho 1000! modi di sommarli

L'idea alla base delle serie numeriche è
FISSARE UNIVOCAMENTE
un modo di sommare gli infiniti termini

L'idea è la seguente

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Riprendendo

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1\dots\dots$$

$$1 \to 1-1=0 \to 0+1=1 \to 1-1=0 \to 0+1=1 \dots$$

e la somma (parziale) oscilla tra 1 e 0

Def Data una successione reale $\{a_n\}_n$, diciamo "somma parziale n-esima" e la indichiamo con

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Oss Somma parziale n-esima (o ridotta parziale n-esima) è la somma dei primi n termini di una successione

Esempio $\{a_n\}_n = \{n\}_n$ si ha che

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Esempio $\{a_n\}_n = \{q^n\}_n$ con $q \in \mathbb{R}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n = \sum_{k=0}^{n} q^n = \begin{cases} n+1 & q=1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n$$

$$(1-q) \cdot S_n = (1-q)\left(1 + q + q^2 + \dots + q^n\right)$$

$$= 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^n} + $$
$$- \cancel{q} - \cancel{q^2} + \dots - \cancel{q^n} - q^{n+1}$$
$$= 1 - q^{n+1}$$

$(1-q) S_n = 1 - q^{n+1}$ e, se $q \neq 1$

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad q \neq 1$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1^n = n+1 \qquad q = 1$$

Definizione (Serie numerica)

Diciamo "Serie numerica di termine generale a_n" e la indichiamo con $\sum_n a_n$ la successione delle ridotte parziali n-esime $\{S_n\}_n$

$\sum_n a_n$ converge a S se $\exists \lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

" diverge a $+\infty$ $(-\infty)$ se $\exists \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ $(-\infty)$

" indeterminata se $\nexists \lim_{n\to+\infty} S_n$

$$\sum_n a_n \underset{\text{significa}}{\equiv} \{S_n\}_n$$

dove $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Esempio (Serie di Mengoli)

$$\sum_n \frac{1}{n(n+1)} = \sum_n a_n$$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_n a_n = \frac{1}{1\cdot(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} \quad \forall n \geq 1$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2 = S_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3}$$

$$S_3 = S_2 + a_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \tfrac{1}{4}\right)$$

$$= 1 - \tfrac{1}{4}$$

$$S_4 = S_3 + a_4 = \sum_{k=1}^{4} a_k = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{5}\right)$$

$$= 1 - \tfrac{1}{5}$$

$$S_N = S_{N-1} + a_N = \sum_{k=1}^{N} a_k = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \dots + \left(\tfrac{1}{N} - \tfrac{1}{N+1}\right)$$

$$= 1 - \tfrac{1}{N+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_N = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \tfrac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1^-$$

e quindi $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

ed è una serie convergente

Esempio (serie divergente)

$\sum_n n$ ovvero $a_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

provato in ottobre!

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

questa scrittura ha senso in $\overline{\mathbb{R}}$

quindi $\sum_{k=0}^{\infty} k = +\infty$ è una serie divergente

Esempio (serie indeterminata)

$$\sum_n a_n = \sum_n (-1)^n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$$

in questo caso le ridotte parziali n-esime sono

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} (-1)^k = 1$$

$$S_1 = S_0 + a_1 = 1 + (-1) = 0$$

$$S_2 = S_1 + a_2 = 0 + 1 = 1$$

$$S_3 = S_2 + a_3 = 1 + (-1) = 0$$

$\dots$

Allora $S_{2n} = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ $\Rightarrow \nexists \lim_{n \to +\infty} S_n$

$S_{2n+1} = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

dunque $\{S_n\}_n$ non converge dunque $\sum_n (-1)^n$ è indeterminata

SERIE ARMONICA generalizzata

$$\sum_n 1/n^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\to \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha \le 1 \\ S \in \mathbb{R} & \alpha > 1 \end{cases}$$

ovvero

$$\to \sum_n \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \alpha > 1 \\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } \alpha \le 1 \end{cases}$$

SERIE GEOMETRICA

$$\sum_n q^n \qquad q \in \mathbb{R}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |q| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |q|^n = 0 \Rightarrow \text{essendo } -|q|^n \le q^n \le |q|^n \text{ si ha } \lim_{n\to+\infty} q^n = 0 \quad |q|<1 \\ q > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty \\ q < -1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^{2n} = +\infty \Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty} q^n \\ \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} q^{2n+1} = -\infty \end{cases}$$

$q = 1 \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} 1^k = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{+\infty}$

$q > 1 \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{-\infty}{1-q} = +\infty$

$-1 < q < 1 \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1-q}$

$q \le -1 \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \not\xrightarrow[n\to+\infty]{}$

$$\sum_n q^n \begin{cases} \text{divergente a } +\infty & q \geq 1 \\ \text{converge a } \dfrac{1}{1-q} & -1 < q < 1 \\ \text{indeterminata} & q \le -1 \end{cases}$$

$$\sum_n a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

$$\downarrow$$

$S_0 = a_0 \qquad S_1 = a_0 + a_1 \qquad S_2 = a_0 + a_1 + a_2 \quad \dots$

$\{S_n\}_n$ nuova succ ridotte

$$\sum_n a_n \iff \{S_n\}_n$$