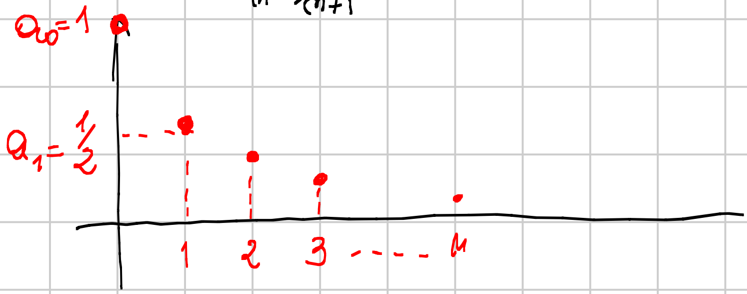
2014-11-10-Lezione 25

Esempio $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \overbrace{\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots\right\}}^{\text{insieme valori di } a(\cdot)}$

$a_0 \quad a_1 \quad a_2$

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a_n = \frac{1}{n+1}$$



Esempio $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$

$a_0 \quad a_1 \quad a_2$

Controesempio $\{a_n\}_{n\in\mathbb{P}} = \left\{\frac{1}{1+(-1)^n}\right\}_{n\in\mathbb{P}}$

questa <u>non</u> va bene poiché è definita <u>solo</u> sui numeri pari

Esempio $\{a_n\}_n = \left\{\frac{n^2}{n-37}\right\}_{n\geq 38} = \left\{(38)^2; \frac{(39)^2}{2}; \dots\right\}$

Definizione Un insieme S viene detto "semiretta di $\mathbb{N}$" <u>se</u> $S = \{n\in\mathbb{N} : n \geq n_0\} = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$

Oss Una semiretta S è $\mathbb{N}$ privato dei primi (n_0-1) termini

Def Data $S \subseteq \mathbb{N}$ semiretta, diciamo "successione di numeri reali" e la indichiamo con $\{a_n\}_{n\in S}$ la funzione

$$S \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a_n$$

dunque $\{a_n\}_{n\in S} = \{a_{n_0}; a_{n_0+1}; \dots; a_{n_0+k}; \dots\}$
dove $S = \{n_0, n_0+1, \dots\}$

Oss: 1) Dare una successione $\iff$ un insieme infinito di valori
Questo infinito è numerabile, nel senso che $\{a_n\}_{n\in S}$ ha lo stesso n.ro di elementi di $S \subseteq \mathbb{N}$

2) Per S, che è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$, esiste un solo p.d.a. : $+\infty$

3) Non è interessante studiare la continuità di $\{a_n\}$ in n_0 : n_0 è isolato per S e dunque $\{a_n\}$ è certamente continua in n_0

Dunque l'unico interesse – per l'analisi – è studiare il comportamento di $\{a_n\}$ per $n \to +\infty$ ovvero

Def Diciamo che $\{a_n\}_n$ "ha limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ per $n \to +\infty$" e scriviamo $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$

se $\forall U \in \mathcal{J}_\ell \; \exists V \in \mathcal{J}_{+\infty} : \forall n \in S \;\; n \in V \Rightarrow a_n \in U$

$\forall U \in \mathcal{J}_\ell \; \exists \,]a, +\infty[\in \mathcal{J}_{+\infty} : \forall n \in S = \{n \geq n_0\} \;\; n \in]a, +\infty[\Rightarrow a_n \in U$

$\forall U \in \mathcal{J}_\ell \; \exists a > 0 : \forall n \geq n_0 \;\; n > a \Rightarrow a_n \in U$

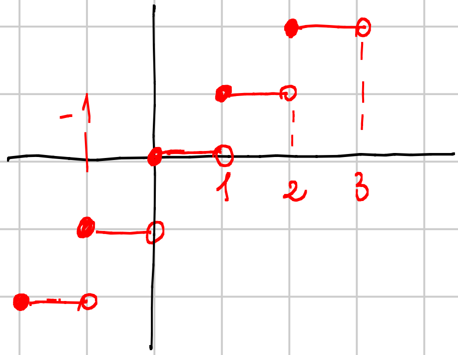
$$\boxed{\forall U \in \mathcal{J}_\ell \; \exists \bar{n} > \max\{a, n_0\} : \forall n > \bar{n} \;\; a_n \in U}$$

Oss: $a \in \mathbb{R}$, talvolta serve parlare di "parte intera di a" ovvero

$\lfloor a \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq a\}$

$\lfloor 2,5 \rfloor = 2 \qquad \lfloor 0,9 \rfloor = 0 \qquad \lfloor -1 \rfloor = -1$

$$\lfloor -1,5 \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \ : \ z \leq -1,5\} = -2$$



$\ell = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad M < a_n$

$\ell = -\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} > 0 \ \forall n > \bar{n} \quad a_n < M$

$\ell \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 \ \forall n > \bar{n} \quad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

Esercizio verificare che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

dim

Devo provare che $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n} - 1\right) = 0$

" " " $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

cioè

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) > 0 : \forall n > \bar{n} \quad -\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$

ma $\frac{1}{n} > 0 \ \forall n > 0$ e dunque devo provare

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$

devo provare

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad \frac{1}{\varepsilon} < n$

Come scegliere $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$? mi basta prendere $\bar{n} = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$

e si ha

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1 : \forall n > \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1 \quad n > \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \ \blacksquare$

Essendo le successioni delle particolari funzioni, continuano a valere i teoremi provati per i limiti di funzioni

Teorema (Unicità)

Se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l$ allora questo è unico

Teorema (Algebra dei limiti)

$\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}$ successioni reali t.c. $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l$ $\exists \lim_{n\to+\infty} b_n = m$

1) $\exists \lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n = l + m$

purché la somma a destra abbia senso

2) $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n = l \cdot m$

purché il prodotto a destra abbia senso

3) se $m \neq 0$ allora $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_n a_n}{\lim_n b_n} = l/m$

purché il quoziente a destra abbia senso

"avere senso" $\Leftrightarrow$ "non è forma indeterminata"

Teorema (limitato · infinitesimo = infinitesimo)

$\{a_n\}_n$ $\{b_n\}$ successioni reali

$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\exists M>0 : |b_n| \le M \ \forall n$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0$

Teorema (Confronto)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali , $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

1) $\exists \lim_n a_n = l \quad \exists \lim_n b_n = m \implies l \leq m$

2) $\exists \lim_n a_n = +\infty \implies \exists \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$

3) $\exists \lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty \implies \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

dim

3) Per ipotesi $\begin{cases} \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad b_n < M \\ a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\implies \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad a_n \leq b_n < M$

$\implies \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad a_n < M$

$\implies \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ $\blacksquare$

Notazioni scrivere $\{a_n\}_n \equiv \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\lim_n a_n = l \iff \lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

(non vi è ambiguità perché l'unico p.d.a. per il dominio di $\{a_n\}$ è $+\infty$)

Teorema (2 Carabinieri)

$\{a_n\}_n\ \{b_n\}\ \{c_n\}_n$ successioni reali
$a_n \le b_n \le c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \ell \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$

Teorema

Data $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A
$B \subseteq A$ $\quad x_0$ " " B

se $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ allora $\exists \lim_{x\to x_0} f_{|B}(x) = \ell$

$\boxed{f_{|B}(x) = f(x) \quad \forall x \in B}$ Restrizione di f a B

Corollario $\boxed{\text{Se } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \text{ allora } \lim_{n\to+\infty} f(n) = \ell}$

si può riguardare come $f_{|\mathbb{N}}$

SOTTOSUCCESSIONI (o successioni estratte)

Esempio $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1/(n+1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ Posso considerare

$$\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{2n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{2n+2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\{a_n\}_n = \left\{1, \underset{a_{2\cdot0+1}}{\frac{1}{2}}, \frac{1}{3}, \underset{a_{2\cdot1+1}}{\frac{1}{4}}, \frac{1}{5}, \underset{a_{2\cdot2+1}}{\frac{1}{6}}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \dots\right\}$$

$a_{2\cdot0} = 1$, $a_{2\cdot1} = \frac{1}{3}$, $a_{2\cdot2} = \frac{1}{5}$, $a_{2\cdot3} = \frac{1}{7}$

$\{b_n\}_n = \{a_{2n}\}_n$ successione degli elementi di posto pari
sottosuccessione di $\{a_n\}_n$

$\{c_n\} = \{a_{2n+1}\}_n$ successione degli elementi di posto dispari
sottosuccessione di $\{a_n\}_n$

Posso considerare

$$\{c_n\}_n = \{a_{3n+1}\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_1 ; a_4 ; a_7 ; a_{10} ; \dots\}$$

$$= \left\{\frac{1}{2} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{8} ; \frac{1}{11} ; \dots\right\}$$

In ciascun caso abbiamo

$k_n = 2n \qquad k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$h_n = 2n+1 \qquad h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad$ e sono tutte CRESCENTI

$t_n = 3n+1 \qquad t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Def (sottosuccessione) Data $\{a_n\}_n$ successione reale diciamo che $\{b_n\}_n$ è una "sottosuccessione di $\{a_n\}_n$" (o successione estratta) se

$\exists k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente t.c. $\{b_n\}_n = \{a_{k_n}\}_n$

Teorema ($k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \uparrow \Rightarrow k(n) \geq n \ \forall n$)

Data $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente allora $k(n) \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

dim

Per induzione $k(0) \geq \min \mathbb{N} = 0$ e quindi la base dell'induzione è soddisfatta

Suppongo (Hp. Induttiva) $k(n) \geq n$

Voglio provare che $k(n+1) \geq n+1$

Ma $k(n+1) \overset{k\uparrow}{>} k(n) \overset{\text{Hp. Ind.}}{\geq} n \Rightarrow k(n+1) \geq n+1$ ▥

Oss $\{x \in \mathbb{N} : x > 3\} = \{4, 5, 6, 7, \dots\}$

$\{x \in \mathbb{N} : x > 14\} = \{15, 16, 17, \dots\}$

Oss le sottosuccessioni aiutano a formulare gli analoghi dei teoremi sulle funzioni quando $x \to x_0^+$ o $x \to x_0^-$

Oss: Una successione è sottosuccessione di sé stessa: basta prendere $\boxed{k_n = n}$

Teorema (successione converge a ℓ $\Rightarrow$ sottosuccessioni convergono a ℓ)

$\{a_n\}_n$ successione reale

Se $\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$ allora $\lim_{n \to +\infty} a_{k_n} = \ell$ $\forall k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\uparrow$

dim

$\forall U \in \mathcal{J}_\ell \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad a_n \in U$

prendo $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strett. crescente $\Rightarrow k(n) \geq n \ \forall n$

Allora

$\forall U \in \mathcal{J}_\ell \ \exists \bar{n} > 0 \quad \forall n > \bar{n} \quad k(n) \geq n > \bar{n} \quad a_{k_n} \in U$

ovvero

$\exists \lim_{n \to +\infty} a_{k_n} = \ell$ ∎

Oss Il risultato precedente si usa nella forma contronominale

ovvero

"$\{a_n\}_n$ successione reale

se $\exists k; h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescenti

con $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = l \neq m = \lim_{n\to+\infty} a_{h_n}$

allora $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$"

Esempio provare che $\{a_n\}_n = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge

dim

$\{a_n\}_n = \{1, -1, 1, -1, 1, -1 \dots\}$

Considero $k_n = 2n$ (i posti pari)

$h_n = 2n+1$ (" " dispari)

$\{b_n\}_n = \{a_{k_n}\}_n = \{a_{2n}\}_n = \{1, 1, 1, \dots, 1 \dots\}$ $\quad \lim_{n\to+\infty} b_n = 1$

$\{c_n\}_n = \{a_{h_n}\}_n = \{a_{2n+1}\}_n = \{-1, -1, \dots, -1, \dots\}$ $\quad \lim_{n\to+\infty} c_n = -1$ //

dunque ho trovato 2 sottosuccessioni con limiti $\neq$

$\Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$

Però

Esempio $\left\{\frac{(-1)^n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n\}_n$

$\{b_n\}_n = \{a_{2n}\}_n = \left\{\frac{1}{2n+1}\right\}_n$ $\quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_n \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

$\{c_n\}_n = \{a_{2n+1}\}_n = \left\{\frac{-1}{2n+2}\right\}_n$ $\quad \lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{2n+2} = \frac{-1}{+\infty} = 0^-$

quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Teorema (di riempimento)

$$\left.\begin{array}{l} \{a_n\}_n \text{ successione reale} \\ k: \mathbb{N}\to\mathbb{N} \text{ strett. crescente} \\ h: \mathbb{N}\to\mathbb{N} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ k(\mathbb{N}) \cup h(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \\ \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \ell = \lim_{n\to+\infty} a_{h_n} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$$

(l'esempio precedente è con $\underset{\substack{\uparrow \\ k(n) \text{ dovrei scrivere}}}{k_n} = 2n$ e $h_n = 2n+1$)