Def Data $f:]x_0-\delta, x_0+\delta[$, diciamo che P_n è "polinomio di Taylor relativo ad f centrato in x_0 di ordine n" se $f(x) - P(x) = o((x-x_0)^n; x_0)$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4, 0)$$
$$\vdots \quad = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}; 0)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}; 0)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n; 0)$$

Teorema (unicità)

Se il polinomio di Taylor esiste, allora è unico

dim

Per assurdo $\exists$ P_n e Q_n polinomi di Taylor ordine n relativi ad f centrati in x_0

$$f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n; x_0)$$
$$f(x) - Q_n(x) = o((x-x_0)^n; x_0)$$

Sottraendo membro a membro

$$(*) \quad Q_n(x) - P_n(x) = (q_0 - p_0) + (q_1 - p_1)(x-x_0) + \dots + (q_n - p_n)(x-x_0)^n = o((x-x_0)^n; x_0)$$

Se ora pongo $x = x_0$ in $(*)$ trovo $q_0 - p_0 = 0$ e quindi

$$\boxed{p_0 = q_0}$$

Dunque la $(*)$ diventa

$$(x-x_0) \cdot \left[(q_1-p_1) + (q_2-p_2)(x-x_0) + \dots + (q_n - p_n)(x-x_0)^{n-1}\right] = o((x-x_0)^n; x_0)$$
$$\Downarrow$$
$$(**) \quad q_1 - p_1 + (q_2-p_2)(x-x_0) + \dots + (q_n - p_n)(x-x_0)^{n-1} = o((x-x_0)^{n-1}; x_0)$$

Se ora pongo $x=x_0$ in (**) trovo

$$q_1-p_1=0 \Rightarrow \boxed{p_1=q_1}$$

quindi (**) diventa

$$(x-x_0)\left[(q_2-p_2)+(q_3-p_3)(x-x_0)+\dots+(q_n-p_n)(x-x_0)^{n-2}\right]=o((x-x_0)^{n-1};x_0)$$

dopo n passaggi trovo che $p_i=q_i \quad i=0,\dots,n$

e dunque $P_n=Q_n$ e dunque il polinomio è unico $\blacksquare$

Esercizio

Provare che 1) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+o(x;0)$

2) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+o(x^2;0)$

3) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3;0)$

---

4) in generale $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^n+o(x^n;0)$

dim

1) $(1-x)(1+x)=1-x^2=1+o(x;0) \qquad x\neq 1$

Dividete per $1-x$ e si trova

$$1+x=\frac{1}{1-x}+\frac{o(x;0)}{1-x} \qquad \text{ma} \quad \frac{o(x;0)}{1-x}=o(x;0)$$

e dunque

$$1+x=\frac{1}{1-x}+o(x;0)$$

e dunque

$$\frac{1}{1-x}=1+x+o(x;0)$$

2) $(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$ per $x\to 0$, quindi $x\neq 1$

divido per $1-x$ (che è $\neq 0$ in quanto $x\to 0$)

$$1+x+x^2=\frac{1}{1-x}-\frac{x^3}{1-x}$$

ovvero

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\frac{x^3}{1-x} \qquad \text{si osserva che } \frac{x^3}{1-x}=o(x^2;0)$$

e ottengo quindi $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+o(x^2;0)$

3) $(1-x)(1+x+x^2+x^3) = 1-x^4$

--- con passaggi analoghi al caso 1) e 2) si ottiene

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+o(x^3;0)$$

è chiaro come si procede nel caso n generico

infatti, $(1-x)(1+x+\dots+x^n) = 1-x^{n+1}$ e quindi ...

////

Dovete ricordare $\frac{1}{1-x} = 1+x+\dots+x^n+o(x^n;0)$

Esercizio Calcolare il polinomio di Taylor centrato in $x_0=0$ della funzione $f(x)=(1+x)^\alpha$ $\alpha\in\mathbb{R}$ $x>-1$ di ordine 3

Doremo la def. di $(1+x)^\alpha \underset{\text{Def}}{=} e^{\alpha\cdot\log(1+x)}$

Noi sappiamo che $e^y = 1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3;0)$ ///

$$\alpha\log(1+x) = \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3;0)\right)\alpha$$

$$= \alpha x - \alpha\frac{x^2}{2}+\alpha\frac{x^3}{3}+o(x^3;0) \quad /// \qquad \boxed{x\to 0}$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\left(\alpha x-\alpha\frac{x^2}{2}+\alpha\frac{x^3}{3}+o(x^3;0)\right)+\frac{1}{2}\left(\alpha x-\alpha\frac{x^2}{2}+\alpha\frac{x^3}{3}+o(x^3;0)\right)^2$$

$$+\frac{1}{6}\left(\alpha x-\alpha\frac{x^2}{2}+\alpha\frac{x^3}{3}+o(x^3;0)\right)^3+o\left(\left(\alpha x-\alpha\frac{x^2}{2}+\alpha\frac{x^3}{3}+o(x^3;0)\right)^3\right)$$

$$=1+\alpha x-\alpha\frac{x^2}{2}+\alpha\frac{x^3}{3}+o(x^3)+\frac{1}{2}\left(\alpha^2x^2-2\alpha^2\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)$$

$$+\frac{1}{6}\left(\alpha^3x^3+o(x^3)\right)+o\left(\alpha^3x^3+o(x^3)\right)$$

$$=1+\alpha x-\alpha\frac{x^2}{2}+\alpha\frac{x^3}{3}+\frac{\alpha^2}{2}x^2-\frac{1}{2}\alpha^2x^3+\frac{1}{6}\alpha^3x^3+o(x^3)$$
$$+o(x^3+o(x^3))$$

$$= 1 + x\cdot\alpha + x^2\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{2}\right) + x^3\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{6}\right) + o(x^3)$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\cdot x^3 + o(x^3)$$

cioè

$$P_3(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 \qquad \boxed{|||}$$

IN GENERALE

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n;0)$$

Oss: posto $x=-y$ e $\alpha=-1$

$$(1-y)^{-1} = 1 + (-1)(-y) + \frac{(-1)(-2)}{2!}(-y)^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}(-y)^3 + \dots + \frac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-1-n+1)}{n!}(-y)^n + o(y^n;0)$$

$$= 1 + y + y^2 + y^3 + \dots + y^n + o(y;0) \qquad = \frac{1}{1-y}$$

ovvero abbiamo ritrovato lo sviluppo di $1/_{1-y}$

Def (equivalenza asintotica)

$f, g : A \to \mathbb{R}$ $\quad f \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \ (\pm\infty)$ $\quad g \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \ (\pm\infty)$ $\quad x_0$ p.d.a. A

diciamo che

"f è asintoticamente equivalente a g per $x \to x_0$"

se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

e si indica "$f \sim g$ per $x \to x_0$"

Esempio $f(x) = \operatorname{sen} x \sim x = g(x)$ per $x \to 0$ infatti

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Esempio $f(x) = x \quad g(x) = x + \sqrt{x}$ "$f \sim g$ per $x \to +\infty$"

infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + 1/\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{1 + 0^+} = 1$$

OSS: Se $f = o(g; x_0)$ allora $f \not\sim g$ per $x \to x_0$

Def (ordine e parte principale di un infinitesimo)

$f : A \to \mathbb{R}$, $f = o(1; x_0)$ (infinitesimo per $x \to x_0$) x_0 p.d.a. A

Se $\exists \alpha > 0$ $\exists a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che

$$f(x) = a \cdot |x - x_0|^\alpha + o(|x - x_0|^\alpha; x_0)$$

allora $a \cdot |x - x_0|^\alpha \equiv$ parte principale dell'infinitesimo $f(x)$ $x \to x_0$

$\alpha \equiv$ ordine dell'infinitesimo $f(x)$ per $x \to x_0$

Esempio $f(x) = \operatorname{sen} x$ per $x \to 0$

Si ha che $f(x) = \operatorname{sen} x = x + o(x)$ per $x \to 0$

e dunque $x \equiv$ parte principale di $f(x) = \operatorname{sen} x$ per $x \to 0$

$1 \equiv$ ordine di infinitesimo di $\operatorname{sen} x$ p

$x \to x_0$

Esempio $f(x) = 1-\cos x$ per $x \to 0$

si sa che

$$f(x) = 1-\cos x = \boxed{\frac{x^2}{2}} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

$\frac{x^2}{2}$ = parte principale di $(1-\cos x)$ per $x \to 0$

2 = ordine di infinitesimo di $(1-\cos x)$ per $x \to 0$

Esempio $f(x) = \frac{1}{\pi}(x-1)^3 + (x-1)^5$

si ha che $f(x) = \frac{1}{\pi}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$ $x \to 1$

dunque

$\frac{1}{\pi}(x-1)^3$ = parte principale di $f(x)$ per $x \to 1$

3 = ordine di infinitesimo per $x \to 1$ di $f(x)$

Esempio (quanto devo sviluppare una funzione)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\frac{x^2}{2} - \cos x}{x^3} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} - \frac{x^2}{2} - (\cancel{1} + o(x))}{x^3}$$

ricordo $\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x^3}$$

NON HO SUFFICIENTI INFORMAZIONI PER CONCLUDERE

Provo a prendere + termini dello sviluppo di $\cos x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - (\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^3))}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^3} \cdot o(1)}{\cancel{x^3}} = \lim_{x \to 0} o(1) = 0$$

Nota: se scrivo $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^3}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{o(x^2)}{x^3}$ non ho scritto nulla di scorretto

ma non posso concludere !!!

Esercizio

Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}\cos 2x + \log(1-3x) - (1-x^2)^2}{x - \operatorname{sen} x}$

dim

Il denominatore $x - \operatorname{sen} x = \cancel{x} - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$

$$= \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$e^{3x} = 1 + (3x) + \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^3)$$

$$\log(1-3x) = (-3x) - \frac{(-3x)^2}{2} + \frac{(-3x)^3}{3} + o(x^3)$$

$$e^{3x}\cdot\cos 2x + \log(1-3x) = \left(1+3x+\frac{9}{2}x^2+9x^3\right)\cdot\left(1-2x^2\right) - 3x$$
$$-\frac{9}{2}x^2 - 9x^3 + o(x^3)$$

$$= 1-2x^2 + \cancel{3x} - 6x^3 + \cancel{\frac{9}{2}x^2} + \cancel{9x^3} - \cancel{3x} - \cancel{\frac{9}{2}x^2} - \cancel{9x^3} + o(x^3)$$

$$= 1-2x^2-6x^3+o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-2x^2-6x^3+o(x^3) - (1-x^2)^2}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{2x^2} - 6x^3 - \cancel{1} - x^4 + \cancel{2x^2} + o(x^3)}{x^3/6 + o(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-6x^3+o(x^3)}{x^3/6+o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{-6x^3}{1/6\cdot x^3} = -36 \;\blacksquare$$

Nota Bene al denominatore ho scritto $x^3/6 + o(x^3)$ in luogo del più preciso $x^3/6 + o(x^4)$: la scrittura è corretta e conservo abbastanza informazioni per concludere.