Teorema (monotonia $\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0^+} f$ ed $\exists \lim_{x \to x_0^-} f$)

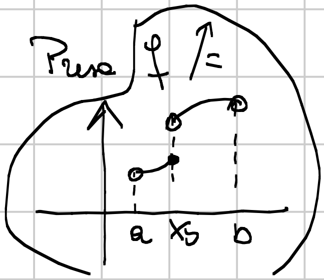
$f:]a,b[\to \mathbb{R}$, f sia debolmente crescente (decrescente) su $]a,b[$

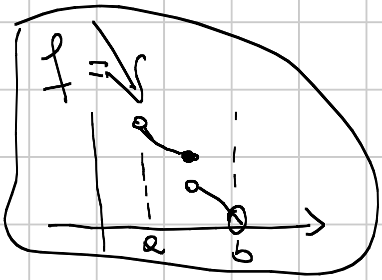
Allora $\forall x_0 \in]a,b[$ $\quad \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ $(\geq)$

ed esiste $\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf f(]a,b[)$ $\quad (\sup f(]a,b[))$

$\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup f(]a,b[)$ $\quad (\inf f(]a,b[))$

Oss: Prendo f ↗=





dim prendo f ↗= (debolmente crescente)

Voglio provare che $\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \inf f(]a,b[)$

Poniamo $L = \inf f(]a,b[)$ che esiste in quanto $f(]a,b[) \subseteq \mathbb{R}$

$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = L$

$L \in \mathbb{R}$ $\quad L = \inf f(]a,b[) \iff \begin{cases} L \leq f(x) \quad \forall x \in]a,b[\quad (1) \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in]a,b[: f(x_\varepsilon) < L + \varepsilon \quad (2) \end{cases}$

$+$

$f(x) \leq f(x_\varepsilon) \quad \forall x \in]a, x_\varepsilon[\quad (3)$

Poniamo $\delta = x_\varepsilon - a$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) = x_\varepsilon - a > 0 : \forall x \in]a,b[\quad a < x < a + \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$$L - \varepsilon < L \underset{(1)}{\leq} f(x) \underset{(3)}{\leq} f(x_\varepsilon) \underset{(2)}{<} L + \varepsilon$$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in]a,b[\quad a < x < a + \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Proviamo che $\exists \underbrace{\lim_{x\to b^-} f(x) = l = \sup f(]a,b[)}$

$l \in \mathbb{R}$ $\quad l=\sup f(]a,b[)$ sse $\begin{cases} f(x)\le l \quad \forall x\in]a,b[\quad (1) \\ \forall \varepsilon>0 \ \exists x_\varepsilon \in]a,b[\ \ l-\varepsilon < f(x_\varepsilon) \quad (2) \end{cases}$

$+$

$f(x_\varepsilon) \le f(x) \quad \forall x \in]x_\varepsilon, b[\quad (3)$

Pongo $\delta(\varepsilon) = b - x_\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta(\varepsilon) = b-x_\varepsilon > 0 : \forall x\in]a,b[\quad b-\delta_\varepsilon < x < b \Rightarrow$

$$l-\varepsilon \overset{(2)}{<} f(x_\varepsilon) \overset{(3)}{\le} f(x) \overset{(1)}{\le} l < l+\varepsilon$$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall x\in]a,b[\quad b-\delta<x<b \Rightarrow l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon$

$\Downarrow$

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = l = \sup f(]a,b[)$$

Preso $x_0 \in]a,b[$ voglio provare che

$\exists \underbrace{\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup f(]a,x_0[)}_{(A)} \qquad \exists \underbrace{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf f(]x_0,b[)}_{(B)}$

Per dimostrare (A) poniamo $M = \sup f(]a,x_0[) \in \mathbb{R}$

$M = \sup f(]a,x_0[)$ sse $\begin{cases} f(x)\le M \quad \forall x\in]a,x_0[\\ \forall \varepsilon>0 \ \exists x_\varepsilon \in]a,x_0[: \ M-\varepsilon < f(x_\varepsilon) \end{cases}$

$+$

$f(x_\varepsilon) \le f(x) \quad \forall x\in]x_\varepsilon, x_0[$

$\delta_\varepsilon = x_0 - x_\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\delta(\varepsilon)=x_0-x_\varepsilon>0 : \forall x\in]a,b[\quad x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow$

$$M-\varepsilon<f(x_\varepsilon)\le f(x)\le M<M+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \forall x\in]a,b[\quad x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow M-\varepsilon<f(x)<M+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=M=\sup f(]a,x_0[)$$

Resta da provare che

$$\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x)=m=\inf f(]x_0,a[)$$

$m=\inf f(]x_0,a[)\in\mathbb{R}$ <u>se</u> $\begin{cases} m\le f(x) \ \forall x\in]x_0,a[\\ \forall \varepsilon>0 \ \exists x_\varepsilon\in]x_0,a[\ f(x_\varepsilon)<m+\varepsilon \end{cases}$

$$+$$

$$f(x)\le f(x_\varepsilon) \ \forall x\in]x_0,x_\varepsilon[$$

posto $\delta=\delta(\varepsilon)=x_\varepsilon-x_0$

$\forall \varepsilon>0 \exists \delta=\delta(\varepsilon)=x_\varepsilon-x_0>0 : \forall x\in]a,b[\quad x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow m-\varepsilon<m\le f(x)\le f(x_\varepsilon)<m+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall x\in]a,b[\quad x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow m-\varepsilon<f(x)<m+\varepsilon$

ovvero $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=m=\inf f(]x_0,b[)$

Infine $\forall x\in]a,x_0[\ \forall y\in]x_0,b[\quad f(x)\le f(y)$

da cui segue $\lim_{x\to x_0^-} f(x)\le \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ $\blacksquare$

CONTINUITÀ della funzione inversa

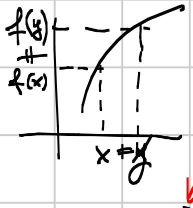
Teorema (stretta monotonia $\Rightarrow$ iniettività)

$f: A \to f(A)$

se f strettamente crescente (decrescente)

allora $f: A \to f(A)$ è iniettiva, (e dunque biiettiva e dunque esiste $f^{-1}: f(A) \to A$)

dim



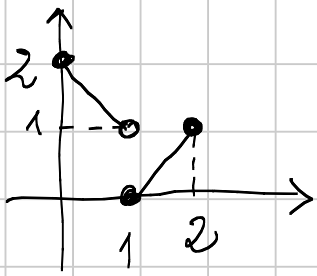
f è strett. crescente

presi $x, y \in A$, $x \neq y \Rightarrow \begin{cases} x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \\ x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \end{cases} \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

Problema

$f: A \to f(A)$ iniettiva $\overset{?}{\Rightarrow}$ f è monotona ?

NO! infatti si prende la funzione f così definita



$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & x \in [0,1[\\ x - 1 & x \in [1,2] \end{cases}$$

Questa funzione è iniettiva (anzi: biiettiva da $[0,2]$ a $[0,2]$) però NON è né crescente
né decrescente

OSS la funzione iniettiva ma NON monotona è discontinua in $x_0 = 1 \in]0,2[$

Nuovo Problema

$f: A \to f(A)$ A intervallo
f iniettiva
f continua $\forall x_0 \in A$

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ f è monotona su A

SI, è monotona e vale il seguente

Teorema

$f: I \to f(I)$ I intervallo, f continua $\forall x_0 \in I$
allora sono tra loro equivalenti
i) f iniettiva su I
ii) f monotona su I

INFINITESIMI e loro confronto

IDEA Data una funzione $f(x)$, cercare di "approssimare" $f(x)$ in un intorno di un punto x_0 con dei polinomi

ovvero scrivere
$$f(x) = (\text{Polinomio}) + (\text{Resto})$$
in modo che $(\text{Resto}) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

Def $f : A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A $\quad$ diciamo "f infinitesima per x che tende a x_0" e scriviamo $\boxed{\text{"} f = o(1, x_0) \text{"}}$ o $\boxed{\text{"} f = o(1) \text{ per } x \to x_0 \text{"}}$

se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

$o(1, x_0) = \{$tutte le funzioni infinitesime per $x \to x_0\}$

Esempio ① $f(x) = x^2$ $\qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \Rightarrow f = x^2 = o(1, 0)$

② $f(x) = 3x + x^{10}$ $\qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \Rightarrow f = 3x + x^{10} = o(1, 0)$

③ $f(x) = (x-1)^3$ $\qquad \lim_{x \to 1} f(x) = 0 \Rightarrow f = (x-1)^3 = o(1, 1)$

Controesempio $f(x) = (x-1)^3 \neq o(1, 0)$

infatti $\lim_{x \to 0} (x-1)^3 = -1 \neq 0$!!

Oss: $o(1,0)$ non è una funzione ma è un insieme di funzioni

Dunque sarebbe più corretto scrivere $x^2 \in o(1,0)$ in luogo di $x^2 = o(1,0)$, ma la convenzione impone l'uguaglianza in luogo dell'appartenenza

Def (confronto tra infinitesimi)

Date $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 pda per A, $f, g = o(1, x_0)$ (ovvero $f \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ $\quad g \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$) diciamo che

"f è un infinitesimo di ordine maggiore rispetto a g per $x \to x_0$" e scriviamo "$f = o(g, x_0)$" ovvero "$f = o(g)$ per $x \to x_0$"

se $\exists\, \eta = o(1, x_0)$: $f(x) = \eta(x) \cdot g(x)$ $\forall x \in A$

Teorema

$f, g : A \to \mathbb{R}$ x_0 polo per A $f, g = o(1, x_0)$ $g(x) \neq 0 \ \forall x \in A$

allora sono equivalenti

i) $f = o(g, x_0)$

ii) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

dim

funzione infinitesima per $x \to x_0$

i) $\Rightarrow$ ii) per ipotesi $f = o(g, x_0) \Rightarrow \exists \eta = o(1, x_0)$ t.c. $f(x) = \eta(x) \cdot g(x) \ \forall x \in A$

e $g \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \eta(x) \quad \forall x \in A$$

$\eta = o(1, x_0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \eta(x) = 0 \quad \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

ii) $\Rightarrow$ i) per ipotesi $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = 0 \Rightarrow$ posto $\eta(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

si ha che $\eta = o(1, x_0) \Rightarrow \exists \eta = o(1, x_0) : \frac{f(x)}{g(x)} = \eta(x)$

$$\Rightarrow \exists \eta = o(1, x_0) : f(x) = \eta(x) \cdot g(x) \Rightarrow f = o(g, x_0) \ \blacksquare$$

Esempio $\operatorname{sen} x - x = o(x)$ per $x \to 0$

dim Risultato noto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x - x = o(x, 0) \quad \blacksquare$$

per il Teorema precedente

Esempio $1 - \cos x - \frac{x^2}{2} = o(x^2, 0)$

dim Risultato noto

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \cos x - \frac{x^2}{2} = o(x^2, 0) \quad \blacksquare$$

Teorema (Transitività)

$f, g, h : A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A $\quad f, g, h = o(1, x_0)$

Se $f = o(g, x_0)$ e $g = o(h, x_0)$ allora $f = o(h, x_0)$

dim

Per ipotesi $\exists \eta_{1}, \eta_{2} = o(1, x_0)$:

$f(x) = \eta_1(x) \cdot g(x) \qquad g(x) = \eta_2(x) \cdot h(x) \qquad \forall x \in A$

$\Rightarrow f(x) = \left(\eta_1(x) \cdot \eta_2(x)\right) \cdot h(x) \quad \forall x \in A$

ma $\eta_1 \cdot \eta_2 = o(1, x_0) \Rightarrow f = o(h, x_0)$ ▮

Teorema

$f : A \to \mathbb{R}$ con x_0 p.d.a. per f

$o(f, x_0) + o(f, x_0) = o(f, x_0)$

dim

$(\supseteq)$ è banale: infatti la funzione identicamente nulla f_0 è un infinitesimo di ordine $> a$ f, ovvero $f_0 = o(f, x_0)$

$\Rightarrow \forall g = o(f, x_0)$, $\quad g + f_0 = o(f, x_0) + o(f, x_0)$

$\subseteq$ è facile: $\quad g = o(f, x_0) \quad h = o(f, x_0) \Rightarrow g + h = o(f, x_0)$

$\exists \eta_1 = o(1, x_0)$: $g = \eta_1 \cdot f$ $\qquad \exists \eta_2 = o(1, x_0)$: $h = \eta_2 \cdot f$ $\qquad g + h = (\eta_1 + \eta_2) \cdot f$, $\quad \eta_1 + \eta_2 = o(1, x_0)$

▮

Esempio $\quad x^5 = o(x^3, 0)$ e $x^{100} = o(x^3, 0)$

(infatti $\lim_{x \to 0} \frac{x^5}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{100}}{x^3} = 0$)

e $\left(x^5 + x^{100}\right) = o(x^3, 0)$

infatti, $\lim_{x\to 0} \frac{x^5+x^{100}}{x^3} = 0$

Teorema

$K\,o(f,x_0) = o(f,x_0)$ $\quad k\in\mathbb{R}\ k\neq 0$

Oss $-1\cdot o(f,x_0) = o(f,x_0)$

$(k=2)$ precedente

Oss $o(f,x_0) - o(f,x_0) \overset{\text{oss.}}{=} o(f,x_0) + o(f,x_0) \overset{\text{Teorema}}{=} o(f,x_0)$

Quello che utilizzeremo saranno gli infinitesimi di ordine maggiore di x^α per $x\to 0$

$o(x^\alpha, 0)$

Possiamo riscrivere i risultati precedenti

Teorema

$o(x^\alpha,0) + o(x^\alpha,0) = o(x^\alpha,0) \quad \forall \alpha>0$

$K\cdot o(x^\alpha,0) = o(x^\alpha,0) \quad \forall\alpha>0\ \forall k\neq 0$

Problema se $f = o(x^3,0)$ allora $x^4\cdot f = x^4\cdot o(x^3,0)$

$\shortparallel$

$o(x^7,0)$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^{10}}{x^3} = 0 \iff x^{10} = o(x^3,0)$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^{14}}{x^7} = 0 \iff x^4\cdot x^{10} = o(x^{3+4},0)$

Teorema

$x^\beta\cdot o(x^\alpha,0) = o(x^{\alpha+\beta},0) \quad \forall\alpha,\beta>0$

dim

$f = o(x^\alpha,0) \iff \lim_{x\to 0}\frac{f}{x^\alpha} = 0 \iff \lim_{x\to 0}\frac{f\cdot x^\beta}{x^{\alpha+\beta}} = 0$

$$\iff f\cdot x^{\beta} = o\left(x^{\alpha+\beta},0\right) \qquad \blacksquare$$

Teorema

$$o(x^{\beta},0)\cdot o(x^{\alpha},0) = o\left(x^{\alpha+\beta},0\right)$$

dim

$(\subseteq)$ $f = o(x^{\alpha},0)$ e $g = o(x^{\beta},0)$ $\iff \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f}{x^{\alpha}} = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g}{x^{\beta}} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f\cdot g}{x^{\alpha+\beta}} = 0 \Rightarrow f\cdot g = o\left(x^{\alpha+\beta},0\right)$$

$(\supseteq)$ $f = o\left(x^{\alpha+\beta},0\right) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^{\alpha}\cdot x^{\beta}} = 0$

$$\iff \exists\, \eta = o(1,0) : f(x) = \eta\cdot x^{\alpha}\cdot x^{\beta} \Rightarrow \exists\, \eta = o(1,0) : f = \eta^{1/3}(x)\, x^{\alpha}\cdot \eta^{2/3}(x)\cdot x^{\beta}$$

$$\Rightarrow f(x) = h(x)\cdot g(x) \quad \text{con} \quad h(x) = \eta^{1/3}(x)\, x^{\alpha} \quad g(x) = \eta^{2/3}(x)\, x^{\beta}$$

$$\Rightarrow f = h(x)\cdot g(x) \quad \text{con} \quad h = o(x^{\alpha},0) \quad g = o(x^{\beta},0)$$

$\blacksquare$

Def (polinomio di Taylor)

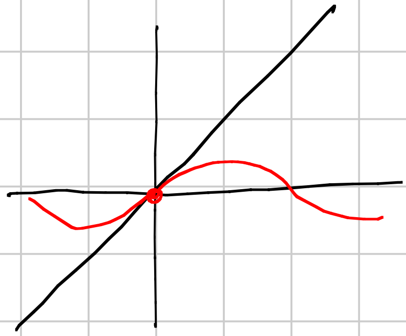
$f:]x_0-\delta, x_0+\delta[\to \mathbb{R}$ diciamo che P_n è "polinomio Taylor relativo ad f di ordine n centrato in x_0"

se $f(x) - P_n(x) = o\left((x-x_0)^n, x_0\right)$

(ovvero quando $f(x) - P_n(x)$ è un infinitesimo di ordine $> n$ per $x \to x_0$)

Si era visto che $\underbrace{\operatorname{sen} x - x = o(x, 0)}$

mi dice che, se approssimo $\operatorname{sen} x$ con il polinomio x commetto un errore che tende a zero, per $x \to 0$, più velocemente di x



Vedremo che

$$\operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{6} = o(x^4, 0)$$

$$\operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{5!} = o(x^6, 0)$$

$$\lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim \frac{x + o(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} + \frac{o(x)}{x} = 1 + 0$$