Analisi Matematica 1

Prova scritta del 2 luglio 2015

Correzione

Prima parte: quiz a risposta multipla

Esercizio 1. L'integrale generalizzato $\int_0^{3e} \log x \, dx$ vale

(A) $3e \log 3$.
(B) $3e \log 3e$.
(C) $(3 + 3\log 3)e$.
(D) $-\infty$.

$$\int_0^{3e} \log x \, dx = \Big[x \log x\Big]_0^{3e} - \int_0^{3e} x \cdot \frac{1}{x} \, dx = 3e \log(3e) - \Big[x\Big]_0^{3e}$$

$$= 3e\big(\log(3e) - 1\big) = 3e \log(3)$$

e la risposta corretta è la (A)

Esercizio 3. L'equazione $e^x - 2x = \alpha$ ha due soluzioni distinte se e solo se

(A) $\alpha > 2 - 2\log 2$.
(B) $\alpha > -2$.
(C) $\alpha < -2\log 2$.
(D) $\alpha < 2 + 2\log 2$.

Posto $f(x) = e^x - 2x$ si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e dunque f possiede minimo assoluto.

Studiando $f'(x) = e^x - 2$ si scopre che

$$f' \begin{cases} < 0 & \text{se } x < \log 2 \\ > 0 & \text{se } x > \log 2 \end{cases} \implies f(\log 2) = 2 - 2\log 2 = \min f(\mathbb{R})$$

e inoltre $f(x)$ è strettamente decrescente su $]-\infty, \log 2[$

" " " crescente su $]\log 2, +\infty[$

dunque la risposta corretta è la (A).

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e strettamente positiva. Se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, allora

(A) $F(-1) < 0$.
(B) $\lim_{x\to-\infty} F(x) \in \mathbb{R}$.
(C) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.
(D) $\exists \min_{x\in\mathbb{R}} F(x)$.

Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale $F'(x) = f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (per ipotesi f è strettamente positiva).

Essendo $F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$, si ha $F(x) < 0 \ \forall x < 0$ da cui segue che $F(-1) < 0$, quindi la (A) è vera.

Inoltre, presa $f(x) = e^{-x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ si ha

$$F(x) = \int_0^x e^{-t}\, dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^x = 1 - e^{-x}$$

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ (non vale (C))

$\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ (non vale (B))

$\inf f(\mathbb{R}) = -\infty$ (non vale (D))

Esercizio 7. La serie numerica $\sum_n n^{2+\alpha-2\alpha^2}$

(A) diverge se $-1 < \alpha < 0$.

(B) converge se $1 < \alpha < 3/2$.

(C) converge se $\alpha > 1$.

(D) diverge se $\alpha < 0$.

Il termine generale della serie $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{2\alpha^2-\alpha-2}$

ovvero è una serie armonica generalizzata con esponente $= 2\alpha^2-\alpha-2$

$\sum_n a_n$ converge se $2\alpha^2-\alpha-2>1$

se $2\alpha^2-\alpha-3>0$

se $2\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)(\alpha+1)>0$

se $\alpha<-1$ o $\frac{3}{2}<\alpha$

e dunque la serie diverge quando $-1<\alpha<0$, ovvero la risposta corretta è la (A).

Si verifica che le altre risposte sono false

Esercizio 9. L'equazione $z^2 + 4\bar{z}\Re z - 2iz = 0$ è risolta da

(A) $\sqrt{3/5} - i$.

(B) $-\sqrt{3/5} + i$.

(C) $-2i$.

(D) $-1 - i\sqrt{3/5}$.

Risolviamo l'equazione passando al sistema reale con $z = a+ib$: si trova

$$(a+ib)^2 + 4(a-ib)\cdot a - 2i(a+ib) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2-b^2+2abi + 4a^2 - 4abi - 2ai + 2b = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 - b^2 + 2b = 0 \\ -2a(b+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} b=2 \\ a=0 \end{cases}$$

$$\text{o } \begin{cases} 5a^2-1-2=0 \\ b=-1 \end{cases}$$

Dunque $z_1=0$ $z_2=2i$ $z_3=\sqrt{\frac{3}{5}}-i$ $z_4=-\sqrt{\frac{3}{5}}-i$ sono le 4 soluzioni, e la risposta corretta è la (A).

Esercizio 11. Sia $f(x) = x + e^{2x}$; la retta tangente al grafico della funzione inversa $g(x) = f^{-1}(x)$ nel punto $(1, 0)$ ha equazione

(A) $y = \frac{1}{3}(x-1)$.

(B) $y = \frac{1}{3}x - 1$.

(C) $y = 3x + 1$.

(D) $x + 3y = 1$.

$f(x)$ è derivabile con $f'(x) = 2e^{2x} + 1 > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, dunque è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. Ne segue che esiste la derivata di $g(x) = f^{-1}(x)$ e si ha

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \Rightarrow g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$$

L'equazione della retta tangente è $y - g(1) = g'(1)(x-1)$ ovvero

$$y = \frac{1}{3}(x-1)$$

e dunque la risposta corretta è la (A)

Esercizio 13. Un mazzo da poker contiene 32 carte, tra cui 4 assi. Pescando a caso 3 carte, qual è la probabilità che siano tre assi ?

(A) $\dfrac{1}{4 \cdot 10 \cdot 31}$.

(B) $\dfrac{1}{8}$.

(C) $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{29}{3}}$.

(D) $\dfrac{4}{32 \cdot 31 \cdot 30}$.

La probabilità dell'evento è $= \dfrac{\text{Casi Favorevoli}}{\text{Casi Possibili}}$

Gli assi disponibili sono 4, dunque

Casi Favorevoli $= \binom{4}{3}$ ≡ tutte le possibili terne di assi

Il mazzo è formato da 32 carte, e dunque

Casi Possibili $= \binom{32}{3}$ ≡ Tutte le possibili Terne

Dunque la probabilità è $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{3}} = \dfrac{4!}{\cancel{3!}\,1!} \cdot \dfrac{\cancel{3!}\,29!}{32!}$

$$= \frac{24}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{1}{4 \cdot 10 \cdot 31}$$

e quindi la risposta corretta è la (A).

1) Calcolate le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{z\sqrt{3}+i}{z-1}\right)^3 = 8i$$

scrivendole tutte in forma algebrica, $z = \Re z + i\Im z$.

Conviene risolvere il sistema $\begin{cases} \omega^3 = 8i \\ \dfrac{z\sqrt{3}+i}{z-1} = \omega \end{cases}$

e ovviamente $\boxed{z \neq 1}$

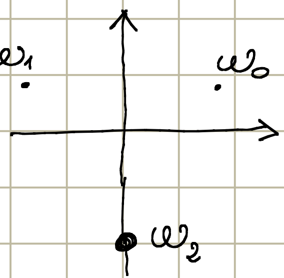
La prima equazione ha come soluzioni le radici cubiche in $\mathbb{C}$ di $8i = 2^3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

e quindi

$$\omega_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}+i$$

$$\omega_1 = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i \operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi\right) = -\sqrt{3}+i$$

$$\omega_2 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right) = -2i$$



La seconda equazione diventa $z\sqrt{3}+i = z\omega - \omega$

ovvero $z(\sqrt{3}-\omega) = -\omega - i$

ovvero $z = \dfrac{\omega+i}{\omega-\sqrt{3}}$

$$\omega_0 = \sqrt{3}+i \Rightarrow z_0 = \frac{\sqrt{3}+i+i}{\sqrt{3}+i-\sqrt{3}} = (\sqrt{3}+2i)(-i) = 2-\sqrt{3}i$$

$$\omega_1 = -\sqrt{3}+i \Rightarrow z_1 = \frac{-\sqrt{3}+i+i}{-\sqrt{3}+i-\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}+2i}{-2\sqrt{3}+i} \cdot \frac{-2\sqrt{3}-i}{-2\sqrt{3}-i} = \frac{6+2+i(\sqrt{3}-4\sqrt{3})}{13} = \frac{8}{13} - \frac{3\sqrt{3}}{13}i$$

$$\omega_2 = -2i \Rightarrow z_2 = \frac{-2i+i}{-2i-\sqrt{3}} = -\frac{i}{7}(2i-\sqrt{3}) = \frac{2}{7} + \frac{\sqrt{3}}{7}i$$

2) Sia data la funzione

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-|x|} .$$

Determinatene il dominio, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia e quelli di convessità/concavità.
Nei punti angolosi di f , calcolate le derivate destra/sinistra.
Usando queste informazioni, tracciate poi un grafico qualitativo della funzione.
(Solo Analisi 1) Calcolate l'estremo inferiore di f , stabilendo se è anche il minimo.

La funzione è definita su $\mathbb{R}$

Inoltre
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+2}{e^x} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{e^x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = 0^+$$

e analogamente $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$

La funzione f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$

Dato che $f(x)$ assume valori positivi ($f(0)=2>0$) che valori negativi ($f(\frac{3}{2})<0$) 5

per un corollario del Teorema di Weierstrass
$\exists \min f(\mathbb{R})$ ed $\exists \max f(\mathbb{R})$

Inoltre $f(x)=0$ se $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$
se $x=1$ o $x=2$

e dunque
$$f(x) \begin{cases} >0 & \text{se } x<1 \text{ o } 2<x \\ <0 & \text{se } 1<x<2 \end{cases}$$

Studiamo la derivata prima
$$f'(x) = (2x-3)e^{-|x|} - (x^2-3x+2)e^{-|x|}\cdot\frac{x}{|x|} \qquad x\neq 0$$
$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(-x^2+5x-5) & \text{se } x>0 \\ e^{x}(x^2-x-1) & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Quando $x<0$ $f'=0$ se $x^2-x-1=0$ e $x<0$
se $x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}$ e $x<0$
se $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Quando $x>0$ $f'=0$ se $x^2-5x+5=0$ e $x>0$
se $x=\frac{5\pm\sqrt{25-20}}{2}$ e $x>0$
se $x_2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$
$x_3=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

Inoltre $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1 \neq -5 = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$ in quanto

f non è derivabile in $x=0$.
Ne segue che
$$f'(x) \begin{cases} >0 & \text{se } x<\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ <0 & \text{se } \frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<0 \\ <0 & \text{se } 0<x<\frac{5-\sqrt{5}}{2} \\ >0 & \text{se } \frac{5-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{5+\sqrt{5}}{2} \\ <0 & \text{se } \frac{5+\sqrt{5}}{2}<x \end{cases}$$

e dunque $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ p.to di max relativo interno
$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ " " " " "
$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ " " minimo " "

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(-x^2+5x-5) & \text{se } x>0 \\ e^{x}(x^2-x-1) & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Calcoliamo la derivata seconda per $x \neq 0$: si ha

$x<0 \quad f''(x) = (2x-1)e^x + e^x(x^2-x-1) = e^x(x^2+x-2)$

$x>0 \quad f''(x) = (-2x+5)e^{-x} - e^{-x}(-x^2+5x-5) = e^{-x}(x^2-7x+10)$

Quando $x<0$ $f''(x)=0$ se $x^2+x-2=0$ e $x<0$

se $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ e $x<0$

se $x_1 = -2$

Quando $x>0$ $f''(x)=0$ se $x^2-7x+10=0$ e $x>0$

se $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2}$ e $x>0$

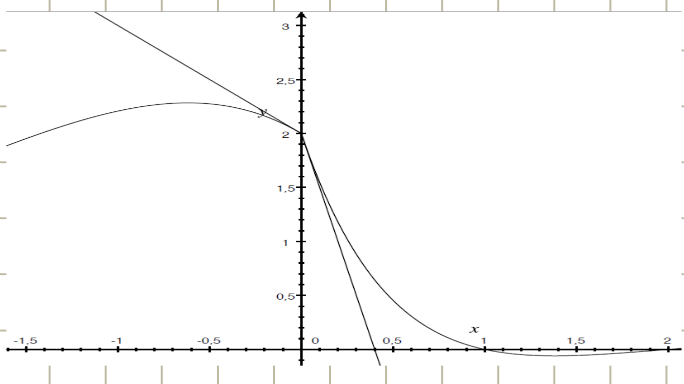
se $x_2 = 2$ o $x_3 = 5$

Quindi $f'' \begin{cases} >0 & \text{se } x<-2 \\ <0 & \text{se } -2<x<0 \\ >0 & \text{se } 0<x<2 \\ <0 & \text{se } 2<x<5 \\ >0 & \text{se } 5<x \end{cases}$

da cui segue

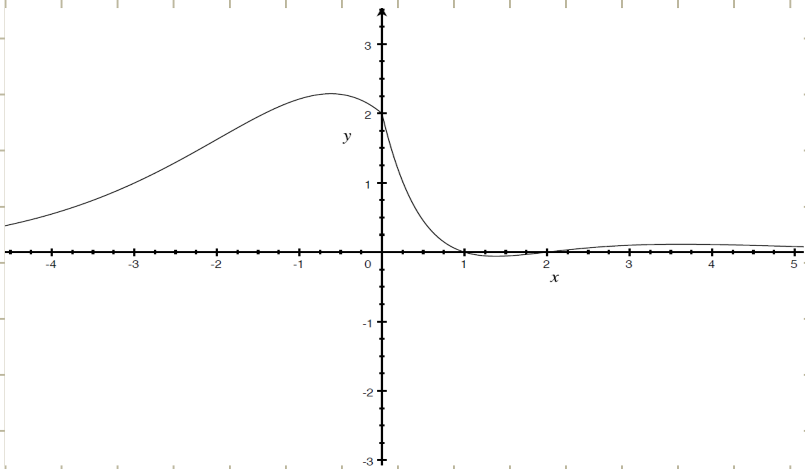
$$f \begin{cases} \text{convessa} & \text{se } x<-2 \\ \text{concava} & \text{se } -2<x<0 \\ \text{convessa} & \text{se } 0<x<2 \\ \text{concava} & \text{se } 2<x<5 \\ \text{convessa} & \text{se } 5<x \end{cases}$$

Possiamo tracciare un grafico. Vediamo come è fatto vicino a $x=0$



Risulta chiaro dal grafico che $x=0$ è punto angoloso in cui $\nexists f'$

Vediamo il grafico della funzione in cui si individuano max, min e regioni di crescenza/decrescenza e regioni di concavità/convessità



Osserviamo che si può verificare che

$$f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \max f(\mathbb{R}) > f\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Essendo f negativa soltanto in $[1,2]$, decrescente in $\left[1, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right[$ e crescente in $\left]\frac{5-\sqrt{5}}{2}, 2\right]$, si ha che $f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) = \min f(\mathbb{R})$

$$f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\left(25+5-10\sqrt{5}\right) - \frac{3}{2}\cdot 5 + \frac{3}{2}\sqrt{5} + 2\right)e^{\frac{\sqrt{5}-5}{2}}$$

$$= \left(\cancel{\frac{15}{2}} - \frac{5}{2}\sqrt{5} - \cancel{\frac{15}{2}} + \frac{3}{2}\sqrt{5} + 2\right)e^{\frac{\sqrt{5}-5}{2}}$$

$$= \left(2-\sqrt{5}\right)e^{\frac{\sqrt{5}-5}{2}} < 0$$

3) Calcolate lo sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ e di ordine 4 della funzione

$$g(x) = \cos x - \cos(\log(1+x)) .$$

Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f(x) = \cos(\alpha x) - \cos(\log(1+\alpha x)) + \alpha^2 x^3 .$$

Calcolate lo sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ e di ordine 4 di f.
Dite poi per quale valore non nullo α_0 la funzione f è un infinitesimo di ordine 4.
Per tale valore α_0 calcolate infine il limite $\lim_{x\to 0} x^{-4} f(x)$.

Sono sviluppi noti

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5) \qquad y \to 0$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \qquad x \to 0$$

$$\Rightarrow \cos(\log(1+x)) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x + o(x)\right)^4$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^4\right) + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{5}{12}x^4 + o(x^4)$$

e quindi

$$g(x) = \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} - \left(\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{2} - \frac{5}{12}x^4\right) + o(x^4) =$$

$$= -\frac{x^3}{2} + \frac{11}{24}x^4 + o(x^4)$$

Consideriamo ora

$$f(x) = \cos(\alpha x) - \cos\left(\log(1+\alpha x)\right) + \alpha^2 x^3$$

utilizzando il punto precedente, si ha

$$f(x) = g(\alpha x) + \alpha^2 x^3 = -\frac{1}{2}\alpha^3 x^3 + \frac{11}{24}\alpha^4 x^4 + \alpha^2 x^3 + o(x^4)$$

$$= \alpha^2 x^3\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{11}{24}\alpha^4 x^4 + o(x^4)$$

Dunque $f(x)$ ha ordine 4 se $\alpha_0 = 2$
e si ha, in corrispondenza a tale valore

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\left(\frac{11}{24}\cdot 2^4 \cdot x^4 + o(x^4)\right) = \frac{22}{3}$$

4) Calcolate il seguente integrale

$$I = \int_0^{\pi/3} \frac{\cos x + 2}{\cos x - 2} \tan x \, dx.$$

(Solo Analisi 1) Stabilite se I è un numero positivo o negativo.

Conviene operare la sostituzione $\cos x = t$
da cui segue $-\operatorname{sen} x \, dx = dt$ e dunque

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\cos x + 2}{\cos x - 2} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dt = \int_1^{1/2} \frac{t+2}{t-2} \cdot \frac{1}{t} \cdot (-1)\, dt$$

$$\frac{t+2}{t(t-2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} = \frac{At + Bt - 2A}{t(t-2)} \Rightarrow \begin{cases} -2A = 2 \\ A + B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$= \int_{1/2}^{1} \left(\frac{2}{t-2} - \frac{1}{t}\right) dt = \Big[2\log(t-2) - \log t\Big]_{1/2}^{1} = \log\frac{1}{2} - 2\log\frac{3}{2}$$

Per il segno si osserva che

$$\log\frac{1}{2} - 2\log\frac{3}{2} = \log\frac{1}{2} - \log\frac{9}{4} = \log\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}$$

$$= \log\frac{2}{9} < 0 = \log 1$$