del problema di Cauchy (4.28) bisogna risolvere il sistema lineare (nelle incognite $c_1, \ldots, c_n$))

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) = y_0, \\ c_1 y_1'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) = y_1, \\ \quad \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)} = y_{n-1}, \end{cases}$$

che può essere riscritto in forma matriciale come $W(x_0)C = Y_0$ dove $W(x_0)$ è la matrice wronskiana (valutata in x_0) costruita a partire dalle funzioni $y_1, \ldots, y_n$ e $C = (c_1, \ldots, c_n)$.
Nel caso in cui si utilizzi il metodo di variazione delle costanti per risolvere l'equazione differenziale in (4.28), la soluzione del problema di Cauchy è data da

$$y(x) = \sum_{s=1}^{n} y_s(x) \left(\hat{c}_s + \int_{x_0}^{x} (W^{-1}(t)B(t))_s \, dt \right), \quad \text{per ogni } x \in I,$$

dove il vettore $\hat{c} = (\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_n)$ è dato da $c = W^{-1}(x_0)Y_0$ e $Y_0 = (y_0, \ldots, y_{n-1})$.

4.5 Esercizi

Esercizio 4.5.1 Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine:

(i) $y' = 3y - \cos(x)$;

(ii) $y' = \dfrac{y}{2x} + \log(x)$;

(iii) $x^2 y' = -2y - 3$;

(iv) $y' = \mathrm{e}^{-2x} - \dfrac{y}{x}$;

(v) $y' = y \log(x) + x^x$;

(vi) $y' = -y \cos(x) + \sin(x)\cos(x)$.

Esercizio 4.5.2

(i) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale del primo ordine

$$y'(x) = (x + y(x))^2 - x - y(x) - 1.$$

(ii) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale del primo ordine

$$y' = \frac{y}{x} \log\left(\frac{y}{x}\right).$$

Suggerimento: porre $z(x) = y(x)/x$.

Esercizio 4.5.3 Determinare le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

(i) $\begin{cases} y' = 3x^2y + x^2 - x^5, \\ y(0) = 0; \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} y' = (1 + y^2)\sin(x), \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Esercizio 4.5.4 Determinare le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

(i) $\begin{cases} y' = 2xy + 3x^3y^{2/3}, \\ y(0) = 8; \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} y' = y + \sin(x)y^{1/3}, \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1; \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} y' - y(x - xy) = 0, \\ y(0) = \frac{1}{2}; \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} y' = -\left(\frac{3}{4x} + \frac{3x}{2}\right) y + y^{-1/3}, \\ y(1) = 1; \end{cases}$

(v) $\begin{cases} y' + \frac{y}{3x} = \frac{\sin(x)}{3x}y^{-2}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Esercizio 4.5.5 Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti:

(i) $y'' - y = 0;$

(ii) $y'' + 4y = 0;$

(iii) $y'' + 4y' + 2y = 0;$

(iv) $y'' = 0;$

(v) $y''' = 0;$

(vi) $y''' - 4y'' + 6y' - 4y = 0;$

(vii) $y''' + 4y'' = 0;$

(viii) $y''' + 4y' = 0;$

(ix) $y^{iv} + 2y'' + y = 0.$

Esercizio 4.5.6 Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti:

(i) $y'' + y' = x;$

(ii) $y'' + y' = x\mathrm{e}^{-x}$;

(iii) $y''' - 2y'' = x^2 + \mathrm{e}^{2x}$;

(iv) $y'' + y = \cos(x)$;

(v) $y''' - 5y'' + 9y' - 5y = x + \mathrm{e}^{2x}$.

Esercizio 4.5.7 Data un'equazione differenziale di ordine tre lineare omogenea a coefficienti costanti, quale tra i seguenti può essere il suo integrale generale?

(i) $c_1 + c_2x + c_3\mathrm{e}^{3x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, al variare di $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;

(ii) $c_1 + c_2x + c_3\cos(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, al variare di $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;

(iii) $c_1 + c_2x + c_3\mathrm{e}^{3x} + x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, al variare di $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;

(iv) $c_1 + c_2x + x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4.5.8 Di quale delle seguenti equazioni, la famiglia di funzioni $x \mapsto c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^{2x} + x^2$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$, è l'integrale generale?

(i) $y'' - y' - 2y = 0$;

(ii) $y'' - y' - y = x^2$;

(iii) $y^{iv} - y''' - 2y'' = -4$;

(iv) $y'' - y' - 2y = 2 - 2x - 2x^2$.

Esercizio 4.5.9 Un'equazione differenziale lineare con integrale generale $c\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x}$, al variare di $c \in \mathbb{R}$, è

(i) omogenea a coefficienti costanti del secondo ordine;

(ii) non omogenea a coefficienti costanti del primo ordine;

(iii) non omogenea a coefficienti costanti del primo ordine;

(iv) omogenea a coefficienti costanti del primo ordine.

Esercizio 4.5.10 La funzione $y(x) = 3\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{3x}$ può essere l'integrale particolare di un'equazione differenziale del primo ordine lineare ed omogenea a coefficienti costanti?

Esercizio 4.5.11 La funzione $y(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2x\mathrm{e}^{3x}$ può essere l'integrale generale di un'equazione differenziale del secondo ordine lineare ed omogenea a coefficienti costanti?

Esercizio 4.5.12 Data un'equazione differenziale del secondo ordine lineare ed omogenea a coefficienti costanti tale che una sua qualsiasi soluzione tende a 0 quando $x \to +\infty$ assumendo infinite volte il valore 0, cosa si può dire delle soluzioni del polinomio caratteristico?

Esercizio 4.5.13 Data un'equazione differenziale del secondo ordine lineare ed omogenea a coefficienti costanti tale che una sua qualsiasi soluzione non ha limite quando $x \to +\infty$ essendo però limitata, cosa si può dire delle soluzioni del polinomio caratteristico?

Esercizio 4.5.14 Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti

$$y'' + a_0 y' + a_1 y = \mathrm{e}^{3x}.$$

Stabilire quali condizioni devono verificare i coefficienti a_0 e a_1 affinché tutte le soluzioni di tale equazione tendano a $+\infty$ quando $x \to +\infty$?
Suggerimento: analizzare la forma delle soluzioni dell'equazione al variare delle radici del polinomio caratteristico.

Esercizio 4.5.15 Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$y'' - y = \sqrt{1 + \mathrm{e}^x}.$$

Suggerimento: si usi il metodo di variazione delle costanti.

4.6 Soluzioni

4.5.1 **(i)** L'integrale generale è dato da $y(x) = c\mathrm{e}^{3x} + \frac{3}{10}\cos(x) - \frac{1}{10}\sin(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, al variare di $c \in \mathbb{R}$.
(ii) Ha senso studiare l'equazione differenziale in $I_+ =]0, +\infty[$ e in $I_- =]-\infty, 0[$. In entrambi gli insiemi l'integrale generale è dato da $y(x) = c_\pm x^2 - x\log(x) - x$ per ogni $x \in I_\pm$, al variare di $c_\pm \in \mathbb{R}$.
(iii) Dividendo per $x \neq 0$, l'equazione si trasforma nell'equazione equivalente

$$y' = -\frac{2}{x^2}y - \frac{3}{x^2},$$

le cui soluzioni in $I_+ =]0, +\infty[$ e in $I_- =]-\infty, 0[$ sono le funzioni $y_\pm(x) = c_\pm \mathrm{e}^{\frac{2}{x}} - \frac{3}{2}$, definite per $x \in I_\pm$, al variare di $c_\pm \in \mathbb{R}$.
(iv) Le soluzioni in $I_+ =]0, +\infty[$ e in $I_- =]-\infty, 0[$ sono le funzioni $y_\pm(x) = \frac{c_\pm}{x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4x}\mathrm{e}^{-2x}$, definite per $x \in I_\pm$, al variare di $c_\pm \in \mathbb{R}$.
(v) L'integrale generale dell'equazione è dato dalle funzioni $y(x) = c\mathrm{e}^{-x}x^x + x^x$, definite per $x > 0$, al variare di $c \in \mathbb{R}$.
(vi) L'integrale generale dell'equazione è dato dalle funzioni $y(x) = c\mathrm{e}^{-\sin(x)} + \sin(x) - 1$, definite per $x \in \mathbb{R}$, al variare di $c \in \mathbb{R}$.

4.5.2 **(i)** Questa è un'equazione differenziale del tipo $y' = f(ax + by + c)$, essendo $f(x, y) = (x + y)^2 - x - y - 1$, e si risolve con la sostituzione $z = ax + by + c$, in questo caso $z = x + y$. Si ha dunque

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(y + x)}{dx} = y' + 1 = ((x + y)^2 - x - y - 1) + 1 = z^2 - z,$$

e l'equazione $z' = z^2 - z$ è a variabili separabili, ed ha come integrale generale le funzioni $z(x) = (1 + c\mathrm{e}^x)^{-1}$, al variare di $c \in \mathbb{R}$, più la soluzione $z \equiv 0$.
L'integrale generale cercato è dunque $y(x) = -x + (1 + c\mathrm{e}^x)^{-1}$, al variare di $c \in \mathbb{R}$, più la soluzione $y(x) = -x$.
(ii) In questo caso abbiamo $f(x, y) = g(\frac{y}{x})$. Operando la sostituzione $z = \frac{y}{x}$ si ottiene

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(y/x)}{dx} = \frac{y' - y/x}{x} = \frac{(y/x)\log(y/x) - y/x}{x} = \frac{z\log z - z}{x},$$

e l'equazione $z' = \frac{z\log z - z}{x}$ è a variabili separabili con integrale generale $z(x) = \mathrm{e}^{1+c|x|}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, al variare di $c \in \mathbb{R}$. Quindi l'integrale generale dell'equazione di partenza è $y(x) = x\mathrm{e}^{1+c|x|}$, al variare di $c \in \mathbb{R}$.

4.5.3 **(i)** È il problema di Cauchy associato ad un'equazione lineare di ordine 1. L'integrale generale è $c\mathrm{e}^x + x^3/3$, e la soluzione del problema di Cauchy è la funzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $y(x) = x^3/3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
(ii) È il problema di Cauchy associato ad un'equazione a variabili separabili. La soluzione è la funzione $y : I \to \mathbb{R}$ definita da

$$y(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + 1 - \cos(x)\right), \qquad \text{per ogni } x \in I,$$

dove $I = \left\{x \in \mathbb{R} : \cos(x) > 1 - \frac{\pi}{4}\right\}$.

4.5.4 Sono tutti problemi di Cauchy associati ad equazioni di Bernoulli.
(i) Una soluzione (non l'unica: si veda l'osservazione alla fine dell'Esempio 4.3.5) è la funzione $y(x) = \left(2\mathrm{e}^{\frac{x^2}{3}} - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}\right)^3$ definita in $\mathbb{R}$.
(ii) Una soluzione è data da

$$y(x) = \left\{\left(1 + \frac{4}{13}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} - \frac{6}{13}\cos(x) - \frac{4}{13}\sin(x)\right\}^{3/2},$$

definita nell'insieme $I = \{x \in \mathbb{R} : \left(1 + \frac{4}{13}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} - \frac{6}{13}\cos(x) - \frac{4}{13}\sin(x) > 0\}$.
(iii) L'unica soluzione del problema è la funzione $y(x) = \left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + 1\right)^{-1}$ definita in $\mathbb{R}$. Osserviamo che l'equazione, si può trattare come equazione a variabili separabili in quanto $y' = xy(1 - y)$.
(iv) L'unica soluzione del problema è la funzione $y(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{1-x^2}+2}{3x}\right)^{\frac{3}{4}}$ definita in $]0, +\infty[$.
(v) L'unica soluzione del problema è la funzione $y(x) = x^{-1/3}(8 + \cos(1) - \cos(x))^{1/3}$ definita in $]0, +\infty[$.

4.5.5 **(i)** Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 1$, le cui soluzioni sono $\lambda = -1$ e $\lambda = 1$. Quindi $y(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$.

(ii) Il polinomio caratteristico è λ^2+4, le cui soluzioni sono $\lambda = 2i$ e $\lambda = -2i$. Quindi $y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$.
(iii) Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 4\lambda + 2$, le cui soluzioni sono $\lambda = -2 + \sqrt{2}$ e $\lambda = -2 - \sqrt{2}$. Quindi $y(x) = c_1 e^{(-2+\sqrt{2})x} + c_2 e^{-(2+\sqrt{2})x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$.
(iv) Il polinomio caratteristico è λ^2, la cui soluzione è $\lambda = 0$ con molteplicità 2. Quindi $y(x) = c_1 + c_2 x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$.
(v) Il polinomio caratteristico è λ^3, la cui soluzione è $\lambda = 0$ con molteplicità 3. Quindi $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, al variare di c_1, c_2 e c_3 in $\mathbb{R}$.
(vi) Il polinomio caratteristico è $\lambda^3-4\lambda^2+6\lambda-4$, le cui soluzioni sono $\lambda = 2$, $\lambda = 1+i$ e $\lambda = 1-i$. Quindi $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x\cos(x) + c_3 e^x \sin(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, al variare di c_1, c_2 e c_3 in $\mathbb{R}$.
(vii) Il polinomio caratteristico è $\lambda^3 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda+4)$, le cui soluzioni sono $\lambda = 0$ (con molteplicità 2) e $\lambda = -4$. Quindi $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-4x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, al variare di c_1, c_2 e c_3 in $\mathbb{R}$.
(viii) Il polinomio caratteristico è $\lambda^3 + 4\lambda = \lambda(\lambda^2+4)$, le cui soluzioni sono $\lambda = 0$, $\lambda = -2i$ e $\lambda = 2i$. Quindi $y(x) = c_1 + c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, al variare di c_1, c_2 e c_3 in $\mathbb{R}$.
(ix) Il polinomio caratteristico è $\lambda^4+2\lambda^2+1 = (\lambda^2+1)^2$, le cui soluzioni sono $\lambda = -i$ (con molteplicità 2) e $\lambda = i$ (con molteplicità 2). Quindi $y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + c_3 x\cos(x) + c_4 x \sin(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, al variare di c_1, c_2, c_3 e c_4 in $\mathbb{R}$.

4.5.6 **(i)** L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$.
Una soluzione particolare è del tipo $v(x) = (ax+b)x$ (infatti il secondo membro è un polinomio di primo grado, e $\lambda = 0$ è radice del polinomio caratteristico, quindi bisogna cercare una soluzione come v). Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è $y_p(x) = \frac{x^2}{2} - x$.
(ii) L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$.
Una soluzione particolare è del tipo $v(x) = (ax+b)xe^{-x}$ (infatti il secondo membro è un polinomio di primo grado moltiplicato per e^{-x}, e e^{-x} è soluzione dell'equazione omogenea. Quindi bisogna cercare una soluzione come v). Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è $y_p(x) = -\frac{x^2}{2}e^{-x} - xe^{-x}$.
(iii) L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x}, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$.
Una soluzione particolare è del tipo $v(x) = (ax^2+bx+c)x^2 + dxe^{2x}$ (infatti il secondo

membro è un polinomio di secondo grado, ma 1 è soluzione doppia, inoltre e^{2x} è soluzione dell'equazione omogenea e quindi bisogna cercare una soluzione come v). Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è

$$y_p(x) = -\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4}xe^{2x}, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

(iv) L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$.
Una soluzione particolare è del tipo $v(x) = (a\cos(x) + b\sin(x))x$ (infatti il secondo membro è una combinazione lineare delle funzioni seno e coseno e $\lambda = i$ è radice del polinomio caratteristico). Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è $y_p(x) = \frac{x}{2}\sin(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
(v) L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}\sin(x) + c_3 e^{2x}\cos(x),$$

al variare di c_1, c_2 e c_3 in $\mathbb{R}$.
Una soluzione particolare è del tipo $v(x) = Ae^{2x} + ax + b$ (infatti il secondo membro è un polinomio di grado 1 in x sommato ad un esponenziale e^{2x}, e quindi bisogna cercare una soluzione come v). Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è $y_p(x) = e^{2x} - \frac{x}{5} - \frac{9}{25}$.

4.5.7 La risposta corretta è la (i).

4.5.8 La risposta corretta è la (iv).
Attenzione: le funzioni date sono soluzioni anche dell'equazione (iii) ma non rappresentano tutte le soluzioni di tale equazione.

4.5.9 La risposta corretta è la (ii).

4.5.10 Non può essere soluzione di un'equazione differenziale del primo ordine lineare ed omogenea a coefficienti costanti, in quanto le soluzioni di tale equazione devono essere tutte della forma $y(x) = ce^{\lambda x}$.

4.5.11 Non può essere soluzione in quanto, se lo fosse 2 sarebbe radice del polinomio caratteristico. Allora tutte le soluzioni dovrebbero essere della forma (il polinomio caratteristico ha grado 2)

- $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{\lambda_0 x}$, al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$ se λ_0 (l'altra radice del polinomio caratteristico) è diversa da 2;
- $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$, al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$ se λ_0 se $\lambda = 2$ è radice doppia del polinomio caratteristico.

4.5.12 Le soluzioni del polinomio caratteristico sono complesse e coniugate con parte reale negativa.

4.5.13 Le soluzioni del polinomio caratteristico sono complesse e coniugate con parte reale nulla.

4.5.14 Consideriamo per primo il caso in cui $\lambda = 3$ non sia radice del polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2 + a_0\lambda + a_1$. In questo caso la funzione $\hat{y}(x) = \frac{1}{P(3)}\mathrm{e}^{3x}$ è soluzione particolare dell'equazione differenziale. Denotiamo con λ_1 e λ_2 le radici di $P(\lambda)$. Allora

(i) se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 < \lambda_2$, l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \frac{1}{P(3)}\mathrm{e}^{3x}, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;

(ii) se $\lambda_1 = \lambda_2$, l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 x\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \frac{1}{P(3)}\mathrm{e}^{3x}, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;

(iii) se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\{c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)\} + \frac{1}{P(3)}\mathrm{e}^{3x}, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Nel caso (i) tutte le soluzioni tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$ se, e solo se, $\lambda_1, \lambda_2 < 3$ e $P(3) > 0$. Infatti se $\lambda_1, \lambda_2 < 3$, il termine a principale, per x tendente a $+\infty$, è $\frac{1}{P(3)}\mathrm{e}^{3x}$, comunque si scelgano le costanti c_1 e c_2. Se $\lambda_2 > 3$, il termine principale, per $x \to +\infty$, è $c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ (ovviamente nel caso $c_2 \neq 0$) e tale funzione tende a $-\infty$ se $c_2 < 0$.
Nel caso (ii) tutte le soluzioni tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$ se, e solo se, ($\lambda_1 < 3$ e $P(3) > 0$) se, e solo se, ($a_0 > -6$).
Infine nel caso (iii) tutte le soluzioni tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$ se, e solo se, ($\alpha < 3$ e $P(3) > 0$) se, e solo se, ($a_0 > -6$).
Consideriamo ora il caso in cui $\lambda = 3$ sia radice del polinomio caratteristico.

- Se $P(\lambda) \neq (\lambda - 3)^2$, allora tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono date da
$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{3x} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \frac{x\mathrm{e}^{3x}}{6 + a_0}, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$
al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Quindi tutte le soluzioni tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$ se, e solo se, ($\lambda_1 < 3$ e $a_0 > -6$) se, e solo se, ($a_0 > -6$).

- Se $P(\lambda) = (\lambda - 3)^2$, allora tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono date da
$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2\right) e^{3x}, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$
al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e tutte queste funzioni tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

In termini dei coefficienti a_0 e a_1, tutte le soluzioni dell'equazione differenziale tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$ se, e solo se, vale una delle seguenti condizioni:

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} a_0^2 - 4a_1 > 0, \\ -a_0 + \sqrt{a_0^2 - 4a_1} < 6, \\ 9 + 3a_0 + a_1 > 0; \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} a_0^2 - 4a_1 > 0, \\ -a_0 + \sqrt{a_0^2 - 4a_1} = 6, \\ a_0 > -6; \end{cases}$$

$$\text{(iii)} \quad \begin{cases} a_0^2 - 4a_1 = 0, \\ a_0 > -6; \end{cases}$$

$$\text{(iv)} \quad \begin{cases} a_0 = -6, \\ a_1 = 9; \end{cases}$$

$$\text{(v)} \quad \begin{cases} a_0^2 - 4a_1 < 0, \\ a_0 > -6. \end{cases}$$

4.5.15 L'integrale generale è dato da
$$c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{3}(1 + e^{-x})\sqrt{1 + e^x} + \frac{1}{2} e^x \log(\sqrt{1 + e^x} - 1) - \frac{1}{4} x e^x - \frac{1}{2}\sqrt{1 + e^x},$$
per ogni $x \in \mathbb{R}$, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.