Serie di Taylor
esercizi proposti

1) Calcolare il raggio di convergenza R e la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) x^n$$

$$\boxed{R = 1 \quad f(x) = -\log(1-x) + \frac{x}{1-x}}$$

2) Calcolare la somma S della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\boxed{S = \log 2}$$

3) Calcolare il raggio di convergenza e la somma $f(x)$ della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot x^{2n-1}$$

$$\boxed{R = 1 \quad f(x) = -\frac{x}{(1-x^2)^2}}$$

4) Calcolare il raggio di convergenza e la somma $f(x)$ della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$\boxed{R = 1 \quad f(x) = (1-x)\log(1-x) + x}$$

dim

$$R = \frac{1}{\max\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = 1 \quad , \text{ e dunque}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \qquad x \in [-1,1] \qquad f(0) = 0$$

$\Downarrow$ derivazione per serie

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad x \in [-1,1[\qquad f'(0) = 0$$

$\Downarrow$ derivazione per serie

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \underset{(k=n-1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad x \in]-1,1[\qquad f''(0)=1$$

Utilizzando il Teorema dell'integrazione per serie 2 volte

$$f'(x) = \int_0^x f''(t)\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} dt = \Big[-\log(1-t)\Big]_{t=0}^{t=x} = -\log(1-x)$$

$x \in [-1,1[$

$t=x \longrightarrow y=1-x$

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x -\log(1-t)\,dt \overset{1-t=y}{=} -\int_1^{1-x} \log y \,(-dy)$$

$$= \Big[y\log y - y\Big]_{y=1}^{y=1-x} = (1-x)\log(1-x) - \cancel{1} + x \cancel{+1}$$

4) Osservando che $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$ per $x \in (-1,1)$,

se ne deduca che $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

dim

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x|<1 \overset{y=-x}{\Longrightarrow} (1+y)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot y^n \quad |y|<1$$

$$\overset{y=t^2}{\Longrightarrow} (1+t^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \quad |t|<1$$

$$\Longrightarrow \arctan x = \int_0^x (1+t^2)^{-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \int_0^x t^{2n} dt \qquad x \in]-1,1]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

e si noti che questa uguaglianza vale anche in $x=1$ per il Teorema di Abel

5) Calcolare la somma S della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+2)}$$

$$\boxed{S=1}$$

$$S = f(1) \quad \text{con } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!\,(n+2)}$$

$R=+\infty$ raggio convergenza

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x \cdot e^x$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^x t e^t \, dt = \left[t e^t - e^t \right]_{t=0}^{t=x} = x e^x - e^x + 1$$

$$f(1) = e - e + 1 = 1$$

6) Provare che

$$\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$x \in \mathbb{R}$

$$\left(\text{sfruttare } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \;\cdots \right)$$

7) Provare che

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$x \in \mathbb{R}$

$$\left(\text{si osservi che } e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \right.$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} +$$

$$+ \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{\vartheta^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$+ i\left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{\vartheta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right)$$

$$e^{-i\vartheta} = \dots$$

8) Data $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con grado $P(x) <$ grado $Q(x)$

Polinomio, Polinomio

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$

Allora $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(x-a_i)}$ con $A_i = \lim_{x \to a_i} (x-a_i) f(x)$

(Posto $f(x) = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \dots + \frac{A_n}{(x-a_n)} \Rightarrow (x-a_1) f(x) = A_1 + \frac{x-a_1}{x-a_2} A_2 + \dots$

e passando al limite si ha la Tesi)

9) Data $f(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^n}$ con grado $P(x) < n$

Polinomio

Allora $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(x-a)^i}$ con $A_{n-k} = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$ $k = 0, \dots, n-1$

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \dots + \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

(ha grado $< n$, dunque $\leq n-1$!!)

dunque

$$f(x) = \frac{P(a) + P'(a)(x-a) + \dots}{(x-a)^n}$$

$$= \frac{P(a)}{(x-a)^n} + \frac{P'(a)}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{1}{k!} \frac{P^{(k)}(a)}{(x-a)^{n-k}} + \dots + \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!\,(x-a)}$$

e dunque $A_{n-k} = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$