Analisi Matematica 1 - Lezione del 20 maggio 2014

Esempio provare che $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Si osserva che $f(x) = e^x = f' = f'' = f''' \dots$

come pure $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = 1$

ed inoltre la serie converge su TUTTO $\mathbb{R}$ poiché

$$\max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1/n!} = 0$$

Esempio provare che $\operatorname{senh} x = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$\cosh x = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

dim

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots \quad \Rightarrow \quad e^x + e^{-x} = 2 + x^2 + 2\frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^x - e^{-x} = 2x - 2\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Esempio: provare che $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

dim

Proviamo solo per $\operatorname{sen} x$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{-ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} = 1 - i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \cdot x - 2i\frac{x^3}{3!} + 2i\frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$= 2i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$f(x) = \operatorname{sen} x \quad f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\operatorname{sen} x \quad f'''(x) = -\cos x \quad f^{(IV)}(x) = \operatorname{sen} x$

$$\Downarrow$$

$a_0 = 0, \; a_1 = 1, \; a_2 = 0, \; a_3 = -1/3!, \; a_4 = 0, \; a_5 = 1/5! \;$ etc

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

e dunque $\quad \operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Analogamente si procede per il $\cos x$

Esercizio: risolvere il Pb. di Cauchy $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

dim

Supponiamo che $\quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 1 \cdot a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \\ y(0) = a_0 = 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$a_0 = 1$

$a_1 = a_0 = 1$

$a_2 = \dfrac{a_1}{2} = 1/2 \qquad$ ovvero $\quad y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$a_3 = \dfrac{a_2}{3} = 1/6$

$a_4 = \dfrac{a_3}{4} = \dfrac{1}{24} \qquad$ che converge $\forall x \in \mathbb{R}$

$\dots$

Attenzione: non so se la soluzione è unica

non ho giustificato il principio di identità tra polinomi

che in questo caso sono di grado ∞

Pb: Tutte le funzioni $f(x)$ derivabili ∞ volte si possono scrivere come serie di potenze?

NO

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$ è derivabile ∞ volte in $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{-1/x} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f''(x) = f''(0) = 0$$

etc

Trovo $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n$

(se fosse possibile svilupparlo)

$$\Rightarrow \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \forall x \text{ Assurdo.}$$

Oss: Sia B = insieme di convergenza di $\sum_n a_n x^n$

" A = " " " " $\sum_n n a_n x^n$

" C = " " " " $\sum_n \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

si ha $A \subseteq B \subseteq C$

Esempio $\sum_n \frac{x^n}{n}$ converge in $B = [-1, 1)$

$\sum_n x^{n-1}$ " " $A = (-1, 1)$

$\sum_n \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ " " $C = [-1, 1]$

Esercizio

Calcolare la somma di $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n$

Sol.

Voglio determinare $f(x)$: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n$

quando $|x|<R=1$

$$R=\frac{1}{\max\lim \sqrt[n]{\frac{n-1}{n}}}=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{n}x^n=f(x) \qquad |x|<1$$

$\Downarrow$ derivo

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\cdot x^{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^{n-1}$$

$$\underset{n-1=k}{=}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot x^k=x\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot x^{k-1}$$

$\Downarrow$

$$\frac{f'(x)}{x}=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1} \qquad |x|<1$$

$\Downarrow$

$$\int_0^x\frac{f'(t)}{t}dt=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x} \qquad |x|<1$$

$\Downarrow$

$$\frac{f'(x)}{x}=\frac{1}{(1-x)^2} \quad |x|<1 \iff f'(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^x\frac{t\,dt}{(1-t)^2}\underset{1-t=y}{=}\int_1^{1-x}\frac{(1-y)}{y^2}(-dy)$$

$$=-\left[-\frac{1}{y}\right]_1^{1-x}+\left[\log y\right]_1^{1-x}=\frac{1}{1-x}-1+\log|1-x|$$

$$=\log|1-x|+\frac{1}{1-x}-1$$