

Alcuni Richiami sulle serie

Teorema

$$\sum_n a_n \text{ con } a_n \geq 0$$

$$\text{Sia } L = \limsup_n \sqrt[n]{a_n}$$

1) Se $L < 1$ allora $\sum_n a_n$ converge
Se $L > 1$ " " " diverge

dim

$$1) L < 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{1-L}{2} \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon = \frac{1+L}{2} < 1$$

$\Downarrow$

$$\exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} a_n < \left(\frac{1+L}{2}\right)^n$$

e la Terza segue dal Teorema del confronto poiché

$$\sum_n \left(\frac{1+L}{2}\right)^n \text{ converge}$$

$$2) L > 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \infty \text{ indici : } L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n}$$

$\Downarrow$

$$\varepsilon = \frac{L-1}{2} \exists \infty \text{ indici : } \left(\frac{L+1}{2}\right)^n < a_n$$

$\Downarrow$

$$\lim_n a_n \neq 0 \text{ e dunque } \sum_n a_n \text{ non converge}$$

ma $a_n \geq 0$

$$\Rightarrow \sum_n a_n \text{ diverge} \quad \square$$

$$\text{Oss: Sia dato } \sum_n \frac{(-1)^n}{n^{p+1}}$$

Questa serie converge semplicemente, e via

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^{p+1}}$$

$$\frac{1}{2}S = \lim_n \sum \frac{(-1)^{k+1}}{2k^{p+1}}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = S$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}S$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} = \frac{3}{2}S$$

ovvero scopro che $\frac{3}{2}S = S$, in quanto la serie in blu è un "riarrangiamento" della serie di partenza. Questo dice che non vale l'associatività quando si ha a che fare con ∞ termini.

Ma è vero molto di più.

Teorema (Riemann) (senza dimostrazione)

Dato $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergente semplicemente a S
 ovvero $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Allora $\forall z \in \mathbb{R} \exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ biunivoca t.c.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = z$$

Successioni e Serie di Funzioni

Def (limite puntuale)

Dato $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$, la successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $x \in I$, se esiste $f: I \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad x \in I$$

Questa funzione f è detta "limite puntuale" su I .

Esempio: $\{f_n(x)\}_n = \{x^n\}_n \quad x \in [0,1]$
 converge puntualmente alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Def (limite uniforme)

$\{f_n(x)\}_n \quad x \in I$ "converge uniformemente" a f su I
 se $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Teorema (Uniforme $\Rightarrow$ Puntuale)

Se $f(x)$ è limite uniforme di $\{f_n(x)\}$ su I allora $f(x) = \lim_n f_n(x) \quad \forall x \in I$

dim (Esercizio)

Teorema (limite uniforme di continue è continuo)

Se $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a $f(x)$ su I
 allora f è continua su I

dim

Essendo f limite uniforme di $\{f_n\}$ su I , si ha
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$$\forall x_0 \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \text{ma } |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \underbrace{\sup_{x \in I} |f(x) - f_n(x)|}_{\substack{\varepsilon \\ n = \bar{n} + 1 > \bar{n}}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{\substack{\varepsilon \\ n = \bar{n} + 1 > \bar{n} \\ \text{e } |x - x_0| < \delta}} + \underbrace{\sup_{x \in I} |f_n(x_0) - f(x_0)|}_{\substack{\varepsilon \\ n = \bar{n} + 1 > \bar{n}}} \end{aligned}$$

quindi, fissato $x_0 \in I$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon, \bar{n} + 1) : \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$$

o verzo

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) : \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \square$$

Oss: $f_n(x) = x^n$ non converge uniformemente su $[0,1]$
 infatti se $f_n \rightarrow f$ uniformemente su I
 allora $f_n(x) \rightarrow f(x)$ puntualmente su I
 ma $f(x)$ limite puntuale è discontinuo
 allora $f_n \not\rightarrow f$ unif. su I

Def

$\sum_n f_n(x)$ $x \in I$ diciamo che

a) converge puntualmente su I

se $\{S_n(x)\} = \left\{ \sum_{k=0}^n f_k(x) \right\}_n$ converge puntualmente $\forall x \in I$

se $\forall x_0 \in I \forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} = \bar{n}(\epsilon, x_0) \forall n > \bar{n} \forall k \quad \left| f_{n+k}(x_0) + \dots + f_n(x_0) \right| < \epsilon$

• converge unif. su I su I

se $\{S_n(x)\}$ converge uniformemente su I

se $\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} = \bar{n}(\epsilon) : \forall n > \bar{n} \forall k \quad \sup_{x \in I} \left| f_{n+k}(x) + \dots + f_n(x) \right| < \epsilon$

Oss: ovviamente Convergenza uniforme $\Rightarrow$ Convergenza puntuale
 $\nLeftarrow$

Oss: $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente a $S(x)$ $\forall x \in I$ e le
 f_n sono continue su $I \Rightarrow S(x)$ è continua su I

Def (Convergenza Totale)

Dato la serie $\sum_n f_n(x)$, diciamo che questa
 "converge totalmente" su I

se $\sum_n \sup_{x \in I} |f_n(x)|$ converge

Oss: Convergenza totale è la convergenza di una
 serie numerica

Teorema (Totale $\Rightarrow$ Uniforme)

Se $\sum_n f_n(x)$ converge totalmente su I
Allora converge uniformemente su I
dim

per ipotesi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad \forall k \quad \sup_{x \in I} |f_{n+k}(x)| + \dots + \sup_{x \in I} |f_n(x)| < \varepsilon$$

$$\text{ma} \quad \sup_{x \in I} |f_{n+k}(x) + \dots + f_n(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_{n+k}(x)| + \dots + \sup_{x \in I} |f_n(x)|$$

$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad \forall k \quad \sup_{x \in I} |f_{n+k}(x) + \dots + f_n(x)| < \varepsilon$$

ovvero $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente su I $\square$

Esempio: $\sum_n x^n$ converge totalmente su $[0, \delta]$
 $\forall \delta \in [0, 1[$

$$\text{infatti} \quad \sup_{x \in [0, \delta]} x^n = \delta^n \quad \text{e} \quad \sum_n \delta^n \text{ converge poich\'e} \quad \sum 1 \quad \square$$

Oss: quando una serie converge totalmente

(o uniformemente) su I , allora

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

\u00e8 una funzione continua su I

SERIE di POTENZE

Def: $\sum_{n \geq 0} a_n (x-x_0)^n$ con $a_n \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$
è detta "Serie di Potenze centrata in x_0 "

Esempio $\sum_n x^n$ serie di potenze centrata in $x_0=0$

Converge $\forall x \in (-1, 1)$ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$

converge uniformemente su $[a, b]$ $\forall [a, b] \subseteq (-1, 1)$ $\square$

Esempio $\sum_n \frac{(x-3)^n}{n \cdot 2^n}$ serie di potenze centrata in $x_0=3$

Converge assolutamente in $]1, 5[$

" " " " uniformemente in $[1, 5]$

$$\text{in ftti } \sqrt[n]{\frac{|x-3|^n}{n \cdot 2^n}} = \frac{|x-3|}{2} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{|x-3|}{2} = L$$

$$L < 1 \Leftrightarrow -2 < x-3 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5$$

Dunque la serie converge assolutamente in $]1, 5[$

" " " " uniformemente in $x_0=3$ $\square$

Inoltre " " " " uniformemente su $[a, b]$

$$\forall [a, b] \subseteq]1, 5[$$

Oss(IMPORTANTE): non è restrittivo studiare

in luogo di $\sum_n a_n (x-x_0)^n$ centrata in x_0

la serie $\sum_n a_n x^n$ centrata in $x_0=0$

Teorema

data $\sum_n a_n x^n$, vale una sola tra le seguenti affermazioni

i) la serie converge in $x=0$

ii) la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$

iii) la serie $\begin{cases} \text{converge se } |x| < R \\ \text{diverge se } |x| > R \end{cases}$

dove

$$R = \frac{1}{\max \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}}$$

dim

a) Se $\sum_n a_n \bar{x}^n$ converge,

allora $\sum_n a_n x^n$ converge assolutamente $|x| < |\bar{x}|$
infatti,

$$\sum_n a_n \bar{x}^n \text{ converge} \Rightarrow a_n \bar{x}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow |a_n \bar{x}^n| \leq K \quad \forall n \quad K \in \mathbb{R}$$

$$|a_n x^n| = |a_n| \cdot |\bar{x}|^n \cdot \left| \frac{x}{\bar{x}} \right|^n \leq K \cdot \left(\frac{|x|}{|\bar{x}|} \right)^n$$

$$\text{e } \sum_n K \left(\frac{|x|}{|\bar{x}|} \right)^n \text{ converge se } |x| < |\bar{x}|$$

$$\Rightarrow \text{(Criterio Confronto)} \quad \sum_n a_n x^n \text{ converge assolutamente se } |x| < |\bar{x}|$$

$$b) |x| < \frac{1}{\max \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}} \Rightarrow \sum_n a_n x^n \text{ converge assolutamente}$$

$$\max_n \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|^n = |x| \cdot \max_n \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

$$\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\max \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}} \Rightarrow \sum_n a_n x^n \text{ converge assolutamente}$$

Quello che compie è il comportamento agli estremi

Esempio: $\sum_n \frac{x^n}{n^2}$ converge assolutamente in $[-1,1]$
ed ha raggio di convergenza $R=1$

la serie derivata è $\sum_n \frac{x^{n-1}}{n}$, che ha ancora raggio di convergenza $R=1$ però non converge in $x=1$

Problema: dato $\sum_n a_n x^n$ con raggio conv. R
t.c. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \forall x: |x| < R$

data $\sum_n a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ con raggio conv. R
t.c. $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x: |x| < R$

è vero che $f'(x) = g(x) \quad \forall x: |x| < R$?

Sì come si prova nel seguente

Teorema (derivazione per serie)

dato $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad |x| < R = \frac{1}{\max \lim \sqrt[n]{|a_n|}}$

definita per $|x| < R$

$\Rightarrow f$ è differenziabile in $|x| < R$ e si ha

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$$

dim

Se $|x| < R$ e $h > 0$: $|x+h| < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (|x+h|)^n = K \in \mathbb{R}$ ①

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k = x^n + n x^{n-1} h + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k$$

Però $|h| < H$ $\left| (x+h)^n - x^n - nx^{n-1}h \right| = \left| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k \right|$

$$= \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |x|^{n-k} \frac{|h|^k}{H^k} \cdot H^k$$

$$\leq \frac{|h|^2}{H^2} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |x|^{n-k} H^k$$

$$\leq \frac{|h|^2}{H^2} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |x|^{n-k} H^k = \frac{|h|^2}{H^2} (|x|+H)^n$$

ovvero $\left| (x+h)^n - x^n - nx^{n-1}h \right| \leq \frac{|h|^2}{H^2} (|x|+H)^n$ (2)

Inoltre $|nx^{n-1}| = n \frac{|x|^{n-1}H}{H} \leq \frac{1}{H} (|x|+H)^n$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} |nx^{n-1}| \cdot Q_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cdot \frac{(|x|+H)^n}{H} \leq \frac{1}{H} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n (|x|+H)^n = \frac{K}{H} \in \mathbb{R}$ per la (1)

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n(x+h)^n - Q_n x^n - nx^{n-1}h}{h} \right|$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \sum_{n=1}^{\infty} |Q_n| \cdot \left| (x+h)^n - x^n - nx^{n-1}h \right|$$

per la (2) $\Rightarrow \frac{|h|}{H^2} \sum_{n=1}^{\infty} |Q_n| (|x|+H)^n \leq \frac{K |h|}{H^2}$

e dunque $\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| = |f'(x) - g(x)| = 0$

da cui segue $f'(x) = g(x) \quad \forall x \quad |x| < R$ III

Teorema

dato $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n \quad |x| < R = \frac{1}{\max \limsup |Q_n|}$

definita per $|x| < R$

$\Rightarrow f$ è integrabile in $[a,b]$ $\forall [a,b] \subset [-R,R]$ e si ha

$$\int_a^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n}{n+1} x^{n+1} \quad \forall x \in [a,b]$$

dim
 Sia $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$: dato che $\left| \frac{a_n}{n+1} \right| \leq |a_n|$,
 si ha che $F(x)$ ha raggio di convergenza R

Ma per il Teorema di derivazione per serie si ha
 $F'(x) = f(x) \quad F(0) = 0$
 $\Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \forall x \in [0, b]$ III

Esercizio Provare che $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$

$$\text{infatti, } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Rightarrow \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

(derivazione per serie)

$x \in (-1, 1)$ $x \in (-1, 1)$

da cui segue la tesi III

Esercizio: Provare che $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad |x| < 1$$

$$\Rightarrow \log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{III}$$

Teorema (Abel) (non dimostrato)

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ continua $|x| < R$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ converge, allora $f(R) = \lim_{x \rightarrow R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$
 " $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ " , " $f(-R) = \lim_{x \rightarrow -R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$

Esempio : provare che $\log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$

dim

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{per } x \in (-1, 1)$$

ma $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^n}{n+1}$ converge

$$\Rightarrow \text{(Teorema Abel)} \quad \log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Esempio Provare che $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$

$$\text{dim} \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad |x| < 1$$

$$\Rightarrow \arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad |x| < 1$$

III

Teorema

$$\text{Se } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n (x-x_0)^n \quad |x-x_0| < R$$

$$\text{allora } Q_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad n=0,1,2,\dots$$

dim

$$f(x) = Q_0 + Q_1(x-x_0) + Q_2(x-x_0)^2 + \dots$$

$$f'(x) = Q_1 + 2Q_2(x-x_0) + \dots$$

$$f''(x) = 2Q_2 + \dots$$

$$f(x_0) = Q_0$$

$$f'(x_0) = Q_1$$

$$f''(x_0) = 2Q_2$$

etc III

Dato $f \in C^\infty(\mathbb{R}+x_0, \mathbb{R}+x_0]$

$$R = \frac{1}{\max_n \sqrt[n]{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}}$$

$$\text{diciamo che } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = l_0$$

Serie di Taylor relativa a f centrata in x_0
che converge per $|x-x_0| < R$