

TUTORATO

Titolo nota

15/05/2014

EQUAZIONI DI 3° GRADO:

Vogliamo risolvere equazioni nella forma $z^3 + az^2 + bz + c = 0$.

CASO PARTICOLARE: $x^3 - 3px - 2q = 0$

⇓

Formula risolutiva $x = \underbrace{\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}}_u + \underbrace{\sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}}_v = u + v$

con la condizione che $u \cdot v = p$

Nel caso generale, utilizzo la sostituzione $w = z + h$ per ottenere:

$$z^3 + az^2 + bz + c = w^3 - 3pw - 2q$$

$$z^3 + az^2 + bz + c = z^3 + h^3 + 3z^2h + 3zh^2 - 3pz - 3ph - 2q$$

Da cui ottengo:

$$\begin{cases} 3h = a \\ 3(h^2 - p) = b \\ h^3 - 3ph - 2q = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{a}{3} \\ p = \frac{a^3}{9} - \frac{b}{3} \\ q = -\frac{a^3}{27} + \frac{ab}{6} - \frac{c}{2} \end{cases}$$

Quindi le soluzioni saranno le tre

$$z_{1,2,3} = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} - h$$

che soddisfanno $u \cdot v = p$

ESERCIZIO: Trovare le soluzioni di

$$z^3 + 3z^2 - 3z - 9 = 0 \quad \text{utilizzando la formula risolutiva.}$$

OSS: Le soluzioni si possono trovare facilmente in questo modo:

$$0 = z^3 - 3z + 3z^2 - 9 = (z+3)(z^2-3)$$

Da cui si ottengono le radici reali $z_1 = -3$, $z_2 = \sqrt{3}$, $z_3 = -\sqrt{3}$

Con il metodo della formula risolutiva per equazioni di 3° grado si ottiene:

$$h = \frac{a}{3} = 1$$

$$p = \frac{a^2}{9} - \frac{b}{3} = 2 \quad ; \quad q = -\frac{a^3}{27} + \frac{ab}{6} - \frac{c}{2} = 2$$

$$w = z + 1 \quad , \quad w = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4-8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4-8}} = \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i}$$

$$\text{Calcoliamo } u = \sqrt[3]{2+2i} \quad : \quad |u| = (2\sqrt{2})^{1/3} = \sqrt{2}$$

$$\theta_1 = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$u_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = \sqrt{2} e^{i\pi/12}$$

$$u_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{3}{4}\pi} = -1+i \quad , \quad u_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{5}{4}\pi}$$

$$\text{Calcoliamo } v = \sqrt[3]{2-2i} \quad |v| = \sqrt{2} \quad \theta_2 = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$v_0 = \sqrt{2} e^{-i\pi/12}$$

$$v_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{7}{12}\pi} \quad , \quad v_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{5}{4}\pi} = -1-i$$

Le soluzioni accettabili sono quelle t.c. $u_k v_j = p = 2$. ($k, j = 0, 1, 2$)

$$\text{OSS: } |u| \cdot |v| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \quad . \quad \text{Quindi deve essere } e^{i\alpha} = 1 \Leftrightarrow \alpha = k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad ,$$

$$u_0 v_0 = 2 e^{i(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{12})} = 2 e^{i0} = 2 \quad \text{Sì}$$

$$u_0 v_1 = 2 e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{7}{12}\pi)} = 2 e^{i\frac{2}{3}\pi} \quad \text{No}$$

$$u_0 v_2 = 2 e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{5}{4}\pi)} = 2 e^{i\frac{4}{3}\pi} \quad \text{No}$$

$$u_1 v_0 = 2 e^{i(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{12})} = 2 e^{i\frac{2}{3}\pi} \quad \text{No}$$

$$u_1 v_1 = 2 e^{i(\frac{3}{4}\pi + \frac{7}{12}\pi)} = 2 e^{i\frac{4}{3}\pi} \quad \text{No}$$

$$u_1 v_2 = (-1+i)(-1-i) = +1 + i - i + 1 = 2 \quad \text{Sì}$$

$$u_2 v_0 = 2 e^{i(\frac{17}{12}\pi - \frac{\pi}{12})} = 2 e^{i\frac{4}{3}\pi} \quad \text{No}$$

$$u_2 v_1 = 2 e^{i(\frac{17}{12}\pi + \frac{7}{12}\pi)} = 2 e^{i2\pi} = 2 \quad \text{Sì} \quad (\text{ne ho trovate 3})$$

$$u_2 v_2 = 2 e^{i(\frac{17}{12}\pi + \frac{5}{4}\pi)} = 2 e^{i\frac{1}{3}\pi} \quad \text{No}$$

$$\Rightarrow w_1 = u_0 + v_0 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}} + \sqrt{2} e^{i(-\frac{\pi}{12})} = (1+i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) + (1-i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$

$$= \sqrt{3} + 1$$

$\uparrow e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$$w_2 = u_1 + v_2 = -1 + i - 1 - i = -2$$

$$w_3 = u_2 + v_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{17}{12}\pi} + \sqrt{2} e^{i\frac{7}{12}\pi} = (1+i)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) + (1+i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= 1 - \sqrt{3}$$

$\uparrow e^{i\frac{17}{12}\pi} = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{7}{6}\pi}$
 $\uparrow e^{i\frac{7}{12}\pi} = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{3}}$

Siccome $z = w - 1 \Rightarrow z_1 = \sqrt{3}$, $z_2 = -3$, $z_3 = -\sqrt{3}$, come ci aspettavamo.

ESERCIZIO: Trovare le soluzioni di $z^3 \bar{z} + 3z^2 - 4 = 0$.

Si tratta in realtà di una equazione di 2° grado, poiché $z^3 \bar{z} + 3z^2 - 4 = z^2 |z|^2 + 3z^2 - 4 = 0$, $|z| \in \mathbb{R}$

Sostituzione $z = p e^{i\theta}$, $p = |z|$

$$p^2 e^{i2\theta} \cdot p^2 + 3p^2 e^{i2\theta} - 4 = 0 \Leftrightarrow p^2(p^2 + 3) e^{i2\theta} = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p^2(p^2 + 3) = 4 & \Leftrightarrow p^4 + 3p^2 - 4 = 0 \quad (*) \\ e^{i2\theta} = 1 & \Leftrightarrow 2\theta = 2k\pi \Leftrightarrow \theta = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(*) \quad p^2 = t \Rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \quad t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases}$$

$$p^2 = 1 \Leftrightarrow p = \pm 1; \quad p^2 = -4 \Leftrightarrow p = \pm 2i$$

non accettabile poiché $p \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow z_{1,2} = p e^{i\theta} = \pm 1$$

UNIFORME CONTINUITÀ $\not\Rightarrow$ LIPSCHITZIANITÀ

Controesempio: $f(x) = \sqrt{x}$ per $x \in [0, 1]$

- $f(x)$ è uniformemente continua poiché è continua su un chiuso e limitato (Teorema Heine-Cantor)
- $f(x)$ NON è Lipschitziana in $[0, 1]$.

ovvero $\exists y \in [0, 1]$ t.c. $\forall L \in \mathbb{R}^+$ $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| > L, \forall x$

Sappiamo che $\sqrt{x}$ è derivabile $\forall x \in (0, 1]$, quindi

$$\forall y \in (0, 1] \quad \lim_{x \rightarrow y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(y)| = \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right|$$

Che significa, fissato $y \in (0, 1]$, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $\forall x \in [0, 1]$,

$$|x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \right| < \varepsilon_y \quad \leftarrow \text{al variare di } y, \text{ la costante che maggiore il rapporto cambia.}$$

Vogliamo trovare $\sup_{y \in (0, 1]} \varepsilon_y$

$$\text{se } y = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty \Rightarrow \sup_{y \in (0, 1]} \varepsilon_y = +\infty$$

$$\Rightarrow \forall L > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in [0, \delta] \text{ si ha } \left| \frac{\sqrt{x}}{x} \right| > L$$

$\Rightarrow f(x)$ non è Lipschitz in ogni intorno chiuso di 0.

OSS: $f(x)$ è Lipschitziana e U.C. in ogni $I = [a, b]$ con $b > a > 0$

poiché $\sup_{y \in (a, b)} \varepsilon_y = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

TEOREMA: Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile con derivata continua.

Allora f è Lipschitziana e $L = \sup_{x \in (a,b)} |f'(x)|$

$$\text{Dim: } \exists \xi \in (a,b) \text{ t.c. } \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = f'(\xi)$$

thm Lagrange

Siccome f' è continua, $f'(\xi) < \sup_{x \in (a,b)} |f'(x)| =: L$. $\square$

ESERCIZIO: Studiare la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = a \geq -1 \\ a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} \end{cases}$$

La successione è a termini positivi $\forall n \geq 1$, infatti:

$$a_1 = \sqrt{\frac{1+a}{2}} \geq \sqrt{\frac{1-1}{2}} \geq 0$$

$$\text{Base: } a_2 = \sqrt{\frac{1+a_1}{2}} \geq \sqrt{\frac{1}{2}} > 0$$

$$\text{Paso induttivo: Sia } a_n > 0. \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} > \sqrt{\frac{1}{2}} > 0$$

• Caso $-1 \leq a \leq 1$.

Si ha che $\forall n \geq 0 \quad a_n \leq 1$:

$$\text{Base: } a_1 = \sqrt{\frac{1+a}{2}} \leq \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$$

$$\text{Paso: } a_n \leq 1 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} \leq 1$$

Inoltre, la successione è crescente:

$$0 < a_n \leq \frac{1+a_n}{2} < \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} = a_{n+1} \Rightarrow a_n < a_{n+1}$$

$$2a_n \leq 1+a_n \Leftrightarrow a_n \leq 1$$



$$0 < \frac{1+a_n}{2} < 1 \text{ e } x < \sqrt{x} \text{ se } x \in (0,1)$$

Siccome è monotona, allora esiste limite.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$$

Sia f continua e a_n convergente a $l < \infty$

$$\text{Allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(l)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}} \text{ è continua per } \frac{1+x}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

Siccome $a_n \geq -1 \quad \forall n \geq 0$ e $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$, passando al limite si ottiene:

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(l)$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{\frac{1+l}{2}} \Leftrightarrow 2l^2 = 1+l \Leftrightarrow l = 1 \text{ o } l = -\frac{1}{2}$$

$a_n > 0$ definitivamente, perciò $l \neq -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$$

• Caso $a > 1$

Si ha che $\forall n \geq 0 \quad a_n > 1$.

Base: $a_0 = a > 1$

Pero: $a_n > 1 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} > \sqrt{\frac{1+1}{2}} = 1$

Inoltre, a_n è decrescente:

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} < \frac{1+a_n}{2} < a_n \Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

$\nearrow$ se $x > 1$, $x > \sqrt{x}$ $\nearrow$ $1+a_n < 2a_n \Leftrightarrow 1 < a_n$

Il limite esiste e si ottiene come nel primo caso.

$$\Rightarrow \forall a \geq -1, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$$

ESERCIZIO: Studiare la convergenza assoluta di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ al variare di } x \in \mathbb{R}$$

N.B.: $\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)! \end{cases}$

Per $x = 1$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ Converge

poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$

Per $x \neq 1$: usiamo il criterio della radice n -esima:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} = 0 < 1$$

OSS: $a_0 = 1 = e^0$

$$a_n = \frac{x^n}{n!} = \frac{e^0 x^n}{n!}$$

ma e^0 è la derivata n -esima di e^x calcolata in 0.

Sviluppo di Taylor di e^x centrato in $x_0 = 0$:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x) \dots$$

SERIE DI POTENZE:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Cosa succede se $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$?

ESEMPIO:

$$\begin{cases} a_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \\ a_{2n+1} = \left(2 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 2$$

$$\Rightarrow \min \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \quad \max \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$$

$$\min \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}_{\text{se esiste}} \leq \max \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\Rightarrow \text{Se } \max \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < \infty$$

In questo caso, $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ non converge poiché $\max \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$

Consideriamo la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ con a_n come sopra

$$\max \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \max \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2|x|$$

$\Rightarrow$ Essa converge assolutamente se $|x| < \frac{1}{2}$

In generale, se $|x| < \frac{1}{\max \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n| < \infty$.