Analisi Matematica 1 - Lezione del 13 maggio 2014

Costruzione di $\mathbb{R}$ (via le successioni di Cauchy) (CENNI)

Teorema (Principio di Archimede)

Comunque si prendono $a, b \in \mathbb{R}$ $a, b > 0$
esiste $n \in \mathbb{N}$: $na > b$

dim

xassurdo $\exists a, b > 0$ t.c. $na \leq b$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Posto $A := \{x \in \mathbb{R} : x = na \quad n \in \mathbb{N}\}$ si ha $b \in \mathcal{M}_A$
(i maggioranti di A) $\Rightarrow \exists L = \sup A$

Per costruzione $(n+1)a \leq L$ $\forall n \in \mathbb{N}$

da cui segue $na \leq L - a$ $\forall n \in \mathbb{N}$

da cui segue $L - a \in \mathcal{M}_A$: ASSURDO $(L - a < L = \sup A)$

da cui segue la Tesi $\blacksquare$

Inoltre si è provato che

Teorema

$\{a_n\}_n$ è di Cauchy se $\{a_n\}_n$ è convergente

Diamo la seguente

Def (Spazio Metrico Completo)

Dato uno spazio metrico (E, d), ovvero un insieme dove è definita una distanza

$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

1) $d(x,y) \geq 0$ $\forall x,y \in E$; $d(x,y) = 0$ se $x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$ "

3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ $\forall x,y,z \in E$

si dice "Spazio metrico Completo" se
$\forall \{a_n\}_n$ di Cauchy, $\lim_n a_n \in E$

Oss: $\mathbb{R}$ è uno spazio metrico completo con $d(x,y) = |x-y|$

Oss: $\mathbb{Q}$ non è completo con $d(x,y) = |x-y|$
in quanto $\{a_n\}_n$ definita da

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \end{cases}$$ converge a $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Def (Isometria)
Dati gli sp. metrici (E_1, d_1) ed (E_2, d_2), una applicazione biunivoca $f: E_1 \to E_2$ si dice "isometria"

se $\forall x,y \in E_1 \quad d_2(f(x), f(y)) = d_1(x,y)$

Quando esiste una f siffatta, gli spazi son detti "isometrici"

Teorema (non fatto a lezione)
Sia (E,d) uno spazio metrico
Allora esistono uno spazio metrico $(\overline{E}, \overline{d})$ (completamento) ed una applicazione $f: E \to \overline{E}$ t.c.

i) $(\overline{E}, \overline{d})$ è completo
ii) $f: E \to f(E)$ è una isometria
iii) Se esistono (E', d') metrico e $f': E \to E'$ che soddisfano i) e ii) allora $\overline{E}$ è isometrico ad un sottoinsieme di E'

dim (Cenni: si identifichi (E,d) con $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ovvero $d(x,y) = |x-y|$)

$\Omega = \{\{x_n\}_n \subseteq \mathbb{Q} \ : \ \{x_n\}_n \text{ di Cauchy}\}$

Prese $\{x_n\}_n$ e $\{y_n\}_n \in \Omega \quad \exists \lim_n d(x_n, y_n) = \lim_n |x_n - y_n|$

Definiamo la relazione di equivalenza

$\{x_n\} \sim \{y_n\}$ sse $\lim_n |x_n - y_n| = 0$

Poniamo $\overline{\mathbb{Q}} = \Omega/_{\sim}$ (ovvero gli elementi di $\overline{\mathbb{Q}}$ sono classi di equivalenza, i cui elementi sono successioni di Cauchy con lo stesso limite)

$a \in \overline{\mathbb{Q}}$ $\quad a = [\{x_n\}_n] : \forall \{y_n\} \in a \quad \lim_n y_n = a$

$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$

$p/q \longrightarrow [\{x_n\}_n] = p/q \quad : \quad \forall \{y_n\} \in p/q \qquad \lim y_n = p/q$

Si ottiene che $\overline{d}(p/q, p'/q') = \lim_n |x_n - y_n|$

$\forall \{x_n\} \in p/q \quad \forall \{y_n\} \in p'/q'$

Adesso va provato che $(\overline{\mathbb{Q}}, \overline{d})$ è completo (ovvero presa una successione $\{[\{x_n\}]\}_n$ di classi di equivalenza che sia di Cauchy, debbo provare che converge)

Infine va provato il punto iii), ovvero $(\overline{\mathbb{Q}}, \overline{d})$ è il "più piccolo" spazio metrico completo contenente $(\mathbb{Q}, d)$

CARDINALITÀ (cenni)

Def

Dati due insiemi E ed F, questi hanno la stessa "cardinalità" se $\exists\, \phi : E \to F$ biunivoca

In tal caso scriveremo $\#E = \#F$

Esercizio: Provare che la relazione

$$A \sim B \text{ se } \#A = \#B$$

è di equivalenza nell'insieme $\mathbb{P}(\Omega) =$ parti di Ω,

ovvero $A \sim A \quad \forall A \in \mathbb{P}(\Omega)$ (riflessiva)

$A \sim B$ se $B \sim A \quad \forall A, B \in \mathbb{P}(\Omega)$ (simmetrica)

$A \sim B$ e $B \sim C \Rightarrow A \sim C \quad \forall A, B, C \in \mathbb{P}(\Omega)$ (transitiva).

Def

Un insieme A si dice "finito" se esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\#A = \#\{1, 2, \dots, n\}$$

In tal caso diciamo che "$\#A = n$", ovvero che "A ha cardinalità n" ovvero "A ha n elementi"

Un insieme A si dice "infinito" se non è finito

Un insieme A si dice "numerabile" se $\#A = \#\mathbb{N}$, ovvero $\exists\, \phi : A \to \mathbb{N}$ biunivoca

Esempio ① $\{\Delta, \circ, +\} = A \qquad A$ è finito e $\#A = 3$

② $\#\emptyset = 0$

③ $\mathbb{P} = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ è numerabile, cioè $\#\mathbb{P} = \#\mathbb{N}$

infatti

$$\exists\, \phi : \mathbb{P} \to \mathbb{N} \quad \text{biunivoca!}$$
$$n \longmapsto n/2$$

ATTENZIONE : $\mathbb{N}$ è equipotente a $\mathbb{P}$

ma

$$\mathbb{P} \subsetneq \mathbb{N}$$

ovvero $\mathbb{N}$ è equipotente ad una sua parte propria

Vale il seguente

Teorema (senza dimostrazione: vedi il testo di Acerbi & Buttazzo)

Dato un insieme Ω, sono condizioni equivalenti

1) E è infinito
2) $\exists\, F \subseteq E$ con $\# F = \# \mathbb{N}$, ovvero F numerabile
3) $\exists\, G \subsetneq E$ t.c. $\# G = \# E$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$ è numerabile

infatti,

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definita da $\begin{cases} g(2k) = k \\ g(2k+1) = -\dfrac{2k+1+1}{2} \end{cases}$

risulta essere biunivoca

(sostanzialmente ho posto

$\mathbb{P} = \{\text{pari}\}$ in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$

$\mathbb{D} = \{\text{dispari}\}$ " " " " $-(\mathbb{N} \setminus \{0\})$)

$\mathbb{Q}$ è numerabile

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \ : \ p \in \mathbb{Z} \quad q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

Dato che $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sono numerabili, si ha

$\mathbb{Z} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$

$\mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \dots\}$

•) $\# \mathbb{Q} = \# \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ infatti, $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$, $(a, b) \longmapsto a/b$

è biunivoca

•) $\#\,\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\} = \#\,\mathbb{N}$

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
b_0	a_0/b_0	a_1/b_0	a_2/b_0	a_3/b_0	a_4/b_0		
b_1	a_0/b_1	a_1/b_1	a_2/b_1	a_3/b_1			
b_2	a_0/b_2	a_1/b_2	a_2/b_2	a_3/b_2			
b_3							

Introduciamo l'applicazione
$$p_{ij} = \frac{a_i}{b_j}$$
e scriviamo
$$p_{00}, p_{10}, p_{01}, p_{20}, p_{11}, p_{02}, p_{30}, \dots$$

abbiamo provato $\#\,\mathbb{N} = \#\,\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

Esercizio (non fatto a lezione)

Dato un insieme A ; $\#A = n$

" " " B ; $\#B = m$

provare che $\#\{f : A \to B \;:\; f \text{ funzione}\} = (\#B)^{\#A} = m^n$

(Suggerimento : studiare il caso $n=1$ ed m qualsiasi
n qualsiasi ed $m=1$
per primi)

Esercizio: (Non fatto a lezione) provare che

$$\#A = n \Rightarrow \#\{f : A \to A \;:\; f \text{ biunivoca}\} = n!$$

Esercizio (Non fatto a lezione) provare che

$\#A = n$ e $\#B = m$ con $n < m$

$$\Rightarrow \#\{f : A \to B \;:\; f \text{ funzione iniettiva}\} =$$
$$= m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+2)(m-k+1)$$

Esercizio (Non fatto a lezione) provare che

$$\#A = n \Rightarrow \#\{B \subseteq A \;:\; \#B = k\} = \binom{n}{k} \quad \forall k \le n$$

Esercizio (Non fatto a lezione) provare che

$$\# A = n \Rightarrow \# \mathbb{P}(A) = 2^n$$

dim

① l'applicazione $\underset{\substack{\Uparrow \\ A}}{x} \longmapsto \underset{\substack{\Uparrow \\ \mathbb{P}(A)}}{\{x\}}$ è iniettiva, e quindi

$\# A \leq \# \mathbb{P}(A)$

Sia ora $f: A \to \mathbb{P}(A)$ sia ora $F = \{x \in \overset{A}{\underset{\Downarrow}{}}A : x \notin \overset{\mathbb{P}(A)}{\underset{\Downarrow}{}} f(x)\}$

$F \notin f(A)$ infatti

Supponiamo x assurdo sia: $f(a) = F$

1) $a \in F \Rightarrow a \notin f(a) = F \Rightarrow a \notin F$

2) $a \notin F \Rightarrow a \notin f(a) = F \Rightarrow a \in F$

dunque si cade in assurdo

Ne segue che f non è surgettiva mai

Ne segue che $\# A < \# \mathbb{P}(A)$

2) Proviamo $\# \mathbb{P}(A) = 2^n$

$A = \emptyset \Rightarrow \# \mathbb{P}(A) = \# \{\emptyset\} = 1 = 2^0$

supponiamo $\# A = n \Rightarrow \# \mathbb{P}(A) = 2^n$

Prendiamo ora $\# A = n+1$

Ne segue che $A = \{x_0\} \cup B$ con $\# B = n$

Preso $C \in \mathbb{P}(A)$ si hanno 2 casi

α) $C \subseteq B$ ovvero $C \in \mathbb{P}(B)$ con $\# B = n \Rightarrow$ ho 2^n C infatti
(ovvero $x_0 \notin C$)

β) $x_0 \in C \Rightarrow C = \{x_0\} \cup D$ con $D \in \mathbb{P}(B)$
$\Rightarrow$ esistono 2^n C infatti

Dunque $2^n + 2^n = 2^{n+1} = \# \mathbb{P}(A)$ quando $\# A = n+1$ ////

Oss: l'esercizio precedente prova che, comunque si prenda E, $\#E < \#\mathbb{P}(E)$

Teorema (Cantor: $\mathbb{R}$ non è numerabile)

$\mathbb{R}$ non è numerabile

dim

Proveremo che $]0,1[= \{0,a_1 a_2 \cdots a_n \cdots : a_i \in \{0,1,\cdots 9\}\}$
$= \left\{ \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots : \quad " \quad \right\}$

non è numerabile

Per assurdo, se $]0,1[$ numerabile, allora dovrebbe esistere
$\varphi : \mathbb{N}\setminus\{0\} \longrightarrow]0,1[$

ovvero

$]0,1[= \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$

Dunque

$x_1 = 0, a_1^1\, a_2^1\, a_3^1\, a_4^1 \cdots a_n^1 \cdots$

$x_2 = 0, a_1^2\, a_2^2\, a_3^2\, a_4^2 \cdots a_n^2 \cdots$

$\cdots$

$x_n = 0, a_1^n\, a_2^n \cdots\cdots a_n^n \cdots$

$\cdots$

L'allineamento $\bar{y} = \{\bar{y}_n\}_n$: $\bar{y}_n = \begin{cases} 7 & \text{se } 0 \le a_n^n \le 4 \\ 2 & \text{se } 5 \le a_n^n \le 9 \end{cases}$

è tale che
•) $x_n \neq \bar{y}$ $\forall n$ per costruzione
••) $\bar{y} \in]0,1[$

e dunque $\bar{y} \neq \varphi(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

e dunque $\nexists\, \varphi$ biunivoca da $\mathbb{N}$ in $]0,1[$

Ne segue che $]0,1[$ NON È NUMERABILE ////