Analisi Matematica 1 - Lezione del 12 maggio 2014

Funzioni Lipschitziane e Uniformemente Continue

Def (Funzione Lipschitziana)
Data $f: A \to \mathbb{R}$, questa funzione si dice "Lipschitziana" (o L-Lipschitziana)
se $\exists L > 0$: $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y| \quad \forall x, y \in A$

Oss: ① L'essere Lipschitziana è un concetto di natura globale: la costante può cambiare al cambiare dell'insieme A, ma non dipende dal punto.
② Se f è Lipschitziana in A di costante L, allora è Lipschitziana $\forall M \geq L$ (ovvio!)

Esempio: la funzione $f(x) = 5x-3$ è 5-Lipschitziana su tutto $\mathbb{R}$. Infatti
$$|f(x) - f(y)| = |5x-3-5y+3| = 5 \cdot |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$
e dunque la disuguaglianza vale (è qui una uguaglianza).

Teorema (Lipschitzianità $\Rightarrow$ Continuità)
Se $f: A \to \mathbb{R}$ è Lipschitziana di costante $L > 0$ allora f è continua $\forall x \in A$

dim

Si prende $x_0 \in A$. Per la lipschitzianità di f si ha che
$$\forall x \in A \quad |f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0|$$
e quindi se $|x-x_0| < \varepsilon/L = \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x-x_0| < \cancel{L} \cdot \varepsilon/\cancel{L} = \varepsilon$

Ne segue la tesi, ovvero
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \frac{\varepsilon}{L} : \; x \in A \cap \,]x_0-\delta, x_0+\delta[\; \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Oss: si osservi che nel teorema precedente $\delta = \delta(\varepsilon)$, ovvero non se cambiato al cambiare del punto x_0.

Controesempio (f continua $\not\Rightarrow$ f lipschitziana)

Proviamo che la funzione $f(x) = 1/x$ su $(0,1]$ è continua ma non è lipschitziana

dim

Che la funzione $1/x$ sia continua in $(0,1]$ è noto.
Proviamo che $1/x$ non è lipschitziana in $(0,1]$: a tal fine proveremo che

$$\forall M>0 \quad \exists x_M, y_M \in (0,1] \text{ t.c. } \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| > M$$

La funzione $f(x) = 1/x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, dunque si dovranno prendere x_M, y_M molto vicini tra loro in prossimità di 0.

Prendiamo $x_n = 1/n \quad y_n = 1/n - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2}$

$$f(x_n) = n \quad f(y_n) = \frac{n^2}{n-1}$$

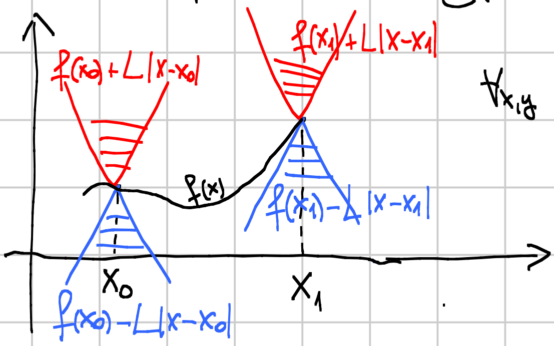
$$Q_n = \left|\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}\right| = \left|\frac{n-\frac{n^2}{n-1}}{1/n^2}\right| = \left|\frac{\cancel{n^2}-n-\cancel{n^2}}{n-1}\cdot n^2\right| = \frac{n^3}{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

e dunque

$$\forall M>0 \ \exists \bar{n}>0 : \forall n>\bar{n} \quad Q_n > M$$

cioè la tesi $\lightning$

Interpretazione grafica della Lipschitzianità



$$\forall x,y \quad |f(y)-f(x)| \leq L\cdot|y-x|$$
$$\Downarrow$$
$$-L|x-y| \leq f(x)-f(y) \leq L|x-y|$$
$$\Downarrow$$
$$\forall x,y \quad f(y)-L|x-y| \leq f(x) \leq f(y)+L|x-y|$$
$$\Downarrow$$
$$\forall x,y \quad f(x)-L|x-y| \leq f(x) \leq f(x)+L|x-y|$$

ovvero il grafico di f NON ATTRAVERSA il cono blu/rosso poiché la pendenza è limitata.

Esempio (in generale $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$)

Dato $f:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, proviamo che

i) f è continua in x_0, $\forall x_0 > 0$

ii) $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ ovvero dipende dal punto in esame

dim

Sia $x_0 > 0$; non è restrittivo scegliere δ : $x_0 - \delta > 0$ ovvero $x_0 > \delta > 0$. Per provare la continuità debbo provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$$

nota: non devo imporre $x > 0$, in quanto $0 < x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$!!

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x_0 - x|}{|x| \cdot |x_0|} \underset{x, x_0 > 0}{=} \frac{|x - x_0|}{x \cdot x_0} \underset{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta}{<} \frac{\delta}{x_0 (x_0 - \delta)} = \varepsilon$$

lo imponiamo, in modo da determinare $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$

Si ha quindi $\delta = \varepsilon x_0^2 - \varepsilon \delta x_0$

ovvero $\delta (1 + \varepsilon x_0) = \varepsilon x_0^2$

ovvero $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = \dfrac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0}$

e quindi

$$\forall x_0 > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0} > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$$

////

Oss: si vede che, fissato $\varepsilon = 1$ $\quad \delta \xrightarrow[x_0 \to +\infty]{} +\infty$

$\delta \xrightarrow[x_0 \to 0]{} 0^+$

e dunque è evidente la dipendenza da x_0 !!

Def (Uniforme continuità)

Data $f: A \to \mathbb{R}$, questa si dice "Uniformemente continua" su A se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in A \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Oss: ① molto importante: $\delta = \delta(\varepsilon)$, ovvero non dipende dal punto x_0

② l'uniforme continuità è un concetto globale, ovvero non dipende dal punto $x_0 \in A$ scelto

È importante stabilire in che relazione sta l'uniforme continuità con la Lipschitzianità e con la continuità.

Nel seguito proveremo che

$$f \text{ Lipschitziana} \underset{\not\Leftarrow \; ⑤}{\overset{①}{\Longrightarrow}} f \text{ uniformemente continua} \underset{\not\Leftarrow \; ③}{\overset{②}{\Longrightarrow}} f \text{ continua}$$

③ in generale

$\Longleftarrow$ ④ Sì, quando $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

① Teorema (f lipschitziana $\Rightarrow$ f uniformemente continua)

Se $f: A \to \mathbb{R}$ è lipschitziana di costante L allora f è uniformemente continua su A

dim

Per ipotesi $\exists L>0 : |f(x)-f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x,y \in A$

Devo provare che $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \forall x,y \in A \ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Prendo $\delta = \varepsilon/L$: con questa scelta

$$|f(x)-f(y)| \leq L \cdot |x-y| < L \cdot \varepsilon/L = \varepsilon$$

e dunque

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \forall x,y \in A \ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Oss: il viceversa non vale. Proveremo più avanti che la funzione $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ $f(x)=\sqrt{x}$ risulta uniformemente continua ma non lipschitziana

② Teorema (f uniformemente continua $\Rightarrow$ f continua)

Se $f: A \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua su A allora f è continua su A

dim

Per ipotesi $\forall \varepsilon>0 \ \exists \underbrace{\delta=\delta(\varepsilon)}_{\text{non dipende dal punto}}>0 : \forall x,y \in A \ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Fisso $x_0 \in A$ in modo qualsiasi: dall'ipotesi segue che

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \underbrace{\delta=\delta(\varepsilon)}_{\text{non dipende da } x_0} \ \forall x \in A \ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

che equivale a scrivere

f continua nel punto x_0

Non vale il viceversa del Teorema precedente, ovvero una funzione continua non è detto sia uniformemente continua

Controesempio (f continua $\not\Rightarrow$ f uniformemente continua)

3 Proviamo che $f(x)=x^2$ su $[0,+\infty[$ risulta
- continua $\forall x \in [0,+\infty[$
- non uniformemente continua su $[0,+\infty[$

dim

Che la funzione sia continua $\forall x\in[0,+\infty[$ era noto (x^2 è un polinomio!)

Per provare che non è uniformemente continua debbo provare

$$\exists \varepsilon_0>0 \ \forall\delta>0 \ \exists x_\delta, y_\delta \in [0,+\infty[\ |x_\delta-y_\delta|<\delta \text{ e } |f(x_\delta)-f(y_\delta)|<\varepsilon$$

Fissiamo $\varepsilon_0=2$ e consideriamo $x_n=n$ $y_n=n+1/n$

Comunque si fissi $\delta>0$, preso $n>1/\delta$ si ha $|x_n-y_n|=1/n<\delta$

Inoltre

$$|f(x_n)-f(y_n)| = \left|n^2-(n+1/n)^2\right| = \left|\cancel{n^2}-\cancel{n^2}+2+1/n^2\right|$$

$$= \left|2+1/n^2\right| \geq 2$$

Abbiamo dunque provato che

$$\exists\varepsilon_0=2 : \forall\delta>0 \ \exists\bar{n} : x_{\bar n}, y_{\bar n}\in[0,+\infty[\ |x_{\bar n}-y_{\bar n}|<\delta \text{ e } |f(x_{\bar n})-f(y_{\bar n})|\geq 2$$

$x_{\bar n}=\bar n$ $\quad y_{\bar n}=\bar n+\frac{1}{\bar n}$

e dunque la funzione $f(x)=x^2$ non è uniformemente continua su $[0,+\infty[$

Oss: per provare nell'esempio precedente che f non è uniformemente continua ho sfruttato il fatto che $[0,+\infty[$ è illimitato.

Ma prendere l'intervallo limitato non basta

Teorema ($f: A \to \mathbb{R}$ unif. continua, A limitato $\Rightarrow f(A)$ limitato)

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ uniformemente continua, A limitato

Allora $f(A)$ è limitato

dim

Dall'ipotesi "f u.c. su A" segue, fissando $\varepsilon = 1$

$$\varepsilon = 1 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x, y \in A \quad |x-y| < \delta \Rightarrow \quad -1 < f(x) - f(y) < 1$$

$$\varepsilon = 1 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x, y \in A \quad |x-y| < \delta \Rightarrow \quad f(y) - 1 < f(x) < f(y) + 1$$

A limitato $\Rightarrow \inf A, \sup A \in \mathbb{R}$ e $A \subseteq [\inf A, \sup A]$

Per semplicità supponiamo $A = [a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$

(altrimenti debbo riguardarlo come unione di intervalli: ....)

Per la proprietà di Archimede $\exists m \in \mathbb{N}$ t.c.

$$b - a = \sup A - \inf A < m \delta$$

e dunque $\exists x_1, \dots, x_m \in A$ t.c. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m}]x_i - \delta, x_i + \delta[$

uniforme continuità

Fissato $x \in A = [a, b]$ $\exists i \in \{1, \dots, m\}$ t.c. $|x - x_i| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_i)| < 1$

$$\Rightarrow |f(x)| < 1 + |f(x_i)|$$

Ne segue che $\forall x \in A \quad |f(x)| \leq 1 + \max_{i=1\dots m} |f(x_i)|$

ovvero $f(A)$ limitato

Da questo teorema discende agevolmente che $f = 1/x$ non è u.c. su $]0,1]$

3 Esempio: $f(x) = 1/x$ non è unif. continua su $]0,1]$

dim

Essendo $]0,1]$ limitato e $f(x) = 1/x$ continua, se per assurdo $f = 1/x$ fosse u.c. su $]0,1]$ allora

$f(x) = 1/x$ sarebbe limitata su $]0,1]$

Ma questo è falso in quanto $\lim_{x \to 0^+} 1/x = +\infty$

ovvero f è illimitata in $]0,1]$ insieme limitato

$\Rightarrow f = 1/x$ non è u.c. su $]0,1]$

Riassumendo, affinché $f: I \to \mathbb{R}$ sia U.C. su I

- non voglio intervalli illimitati
- " " funzioni illimitate su I
- voglio una funzione continua su I

Presentiamo ora una condizione sufficiente utilizzando le stesse ipotesi del Teorema di Weierstrass

Teorema (Heine Cantor) (4)

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua $\forall x \in [a,b]$ intervallo chiuso e limitato allora f è uniformemente continua su $[a,b]$

dim

Assurdo f non sia uniformemente continua, ovvero

$\exists \varepsilon_0 > \ \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta, y_\delta \in [a,b] \quad |x_\delta - y_\delta| < \delta$ e $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0$

$\Downarrow$ prendendo $\delta = 1/n$

$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall n \geq 1 \ \exists x_n, y_n \in [a,b] \quad |x_n - y_n| < 1/n$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$

Adesso osservo che $a \leq y_n \leq b \ \forall n$

$\Rightarrow$ (Teorema Bolzano Weierstrass) $\exists \{y_{k_n}\}_n$ convergente a $\ell \in [a,b]$

$\Rightarrow \forall n \quad -\frac{1}{k_n} < x_{k_n} - y_{k_n} < \frac{1}{k_n}$ dove $k_n \geq n$

$$\Rightarrow \forall n \quad \underbrace{y_{k_n} - \frac{1}{k_n}}_{\downarrow n \to \infty \ \ell} < x_{k_n} < \underbrace{y_{k_n} + \frac{1}{k_n}}_{\downarrow n \to \infty \ \ell}$$

$\Rightarrow$ (Teorema 2 Carabinieri) $x_{k_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

Dunque abbiamo $|x_{k_n} - y_{k_n}| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Per la continuità di f in ℓ

$\lim_{n \to +\infty} f(x_{k_n}) = f(\ell) = \lim_{n \to +\infty} f(y_{k_n})$, e dunque

$$\lim_{n \to +\infty} |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| = 0$$

Ma questo è Assurdo: in corrispondenza ad un $\forall \bar{n}$ devono esistere $x_{k_{\bar{n}}}, y_{k_{\bar{n}}}$: $|x_{k_{\bar{n}}} - y_{k_{\bar{n}}}| < 1/\bar{n}$ e $|f(x_{k_{\bar{n}}}) - f(y_{k_{\bar{n}}})| \geq \varepsilon_0$

Ne segue che f è uniformemente continua. ↯

Controesempio (f uniformemente continua $\not\Rightarrow$ f lipschitziana)

5 Proviamo che $f(x)=\sqrt{x}$

- è uniformemente continua su $[0,1]$
- non è lipschitziana su $[0,1]$

dim

$f(x)=\sqrt{x}$ è continua su $[0,1]$, e quindi è pure uniformemente continua (Teorema Heine Cantor) su $[0,1]$, intervallo chiuso e limitato.

Proviamo ora che esistono $\{x_n\}_n$ $\{y_n\} \subseteq [0,1]$

t.c. $a_n = \left| \dfrac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n - y_n} \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Presi $x_n = 4/n^2$ $y_n = 1/n^2$ si ha

$$a_n = \left| \frac{\sqrt{4/n^2} - \sqrt{1/n^2}}{4/n^2 - 1/n^2} \right| = \left| \frac{1/n}{3/n^2} \right| = \frac{n}{3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

e quindi $\forall M>0 \ \exists \bar{n} : \forall n>\bar{n} \quad a_n > M$

Ne segue che f non può essere lipschitziana

Oss: va notato che $f=1/x$ non è u.c. su $]0,1]$

(Heine Cantor) però

$f=1/x$ è u.c. su $[\delta,1]$ $\forall \delta \in]0,1[$

Oss: va notato che $f=x^2$ non è u.c. su $[0,+\infty[$

(Heine Cantor) però

$f=x^2$ è u.c. su $[0,b]$ $\forall b \in [0,+\infty[$

Oss: Il Teorema di Heine Cantor e il Teorema di Weierstrass hanno le stesse ipotesi

Lipschitzianità e derivata prima

Quale è il legame tra la costante di Lipschitz e la derivata prima?

Dire che f è Lipschitziana su $[a,b]$ con costante di Lipschitz L significa

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-x|} \leq L \quad \forall x,y \in [a,b] \quad x \neq y$$

ovvero il rapporto incrementale è limitato.

Iniziamo con il provare che

Esempio:

Provare che la funzione $f(x) = 2x^2+3$ è

i) 4-Lipschitziana su $[0,1]$ $\qquad 4x$

ii) 8-Lipschitziana su $[0,2]$

dim

i) La funzione $f(x)$ è derivabile con derivata $f'(x) = 4x$, e questa è continua, non negativa e crescente su $[0,1]$ e dunque

$$4 = \lim_{x\to 1} f'(x) = \max f'([0,1]) = \max |f'([0,1])| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Weierstrass}}}{=} \sup |f'([0,1])|$$

Presi comunque $x,y \in [0,1]$ si ha, per il Teorema di Rolle

$$f(x)-f(y) = f'(z)\cdot(x-y) \quad \text{con } z \text{ compreso tra } x \text{ ed } y$$

$$\Downarrow$$

$$|f(x)-f(y)| = |f'(z)|\,|x-y| \leq \sup|f'([0,1])| \cdot |x-y| = 4\cdot|x-y|$$

$$\Downarrow$$

f è 4-Lipschitziana su $[0,1]$

ii) Ragionando come in i), si arriva a dire che f è 8-Lipschitziana su $[0,2]$ in quanto

$$\sup|f'([0,2])| = \sup f'([0,2]) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Weierstrass}}}{=} \max f'([0,2]) = \lim_{x\to 2} f'(x) = 8$$

$\blacksquare$

Oss: Si osservi la dipendenza della costante di Lipschitz dal dominio della funzione

Controesempio (f lipschitziana $\not\Rightarrow$ f derivabile)

$f(x)=|x|$ è lipschitziana su $\mathbb{R}$ con costante 1, però non è derivabile su $\mathbb{R}$ (in $x=0$ non è derivabile)

Neppure il viceversa vale

Controesempio (f derivabile $\not\Rightarrow$ f lipschitziana)

$f(x)=1/x$ è derivabile su $]0,1[$

" non è lipschitziana su $]0,1[$.

Teorema (f' continua su $[a,b]$ $\Rightarrow$ f lipschitziana su $[a,b]$)

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è derivabile con f' continua su $[a,b]$ allora f è lipschitziana su $[a,b]$ con costante

$$L=\max|f'|([a,b])$$

dim

Presi comunque $x,y\in[a,b]$, $x\neq y$, si ha (Teorema Lagrange)

$$|f(x)-f(y)|=|f'(z)\cdot(x-y)| \quad z \text{ compreso tra } x \text{ ed } y$$

$$=|f'(z)|\cdot|x-y|$$

$$\underset{\text{vale il Thm. Weierstrass per } f'}{\leq} \max|f'|\cdot([a,b])\cdot|x-y|$$

Oss: per garantire la lipschitzianità basta supporre che

- f sia derivabile $\forall x\in I$
- $|f'|(x)\leq C$ $\forall x\in I$

Anche in questo caso $L=\sup|f'|(I)$ e si ha $L\leq C$

Uniforme Continuità vs. Comportamento Asintotico

Vediamo il comportamento all'∞ di una funzione u.c.

Teorema $\left(f:[0,+\infty[\to\mathbb{R} \text{ u.c.} \Rightarrow |f(x)|\le A+Bx \ \forall x\in[0,+\infty[\right)$

Sia $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ uniformemente continua

Allora $\exists A,B\geq 0$ t.c. $|f(x)|\le A+Bx \quad \forall x\in[0,+\infty[$

dim

Ovviamente la dim continua a valere se $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ $\forall a\in\mathbb{R}$

Per ipotesi $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall x,y>0 \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Fisso $d=\delta/2$: $\forall i \quad |(i+1)d-id|=d=\frac{\delta}{2}<\delta \Rightarrow |f((i+1)d)-f(id)|<\varepsilon$

Per il principio di Archimede $\forall x>0\ \exists n : \ nd\le x<(n+1)d$

ovvero $\forall x>0\ \exists n : \ n\le \frac{x}{d}<n+1$

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= |f(x)-f(0)+f(0)| \\
&= |f(x)-f(d)+f(d)-f(0)+f(0)| \\
&\dots \\
&= |f(x)-f(nd)+\underbrace{f(nd)-f((n-1)d)+\dots+f(d)-f(0)}+f(0)| \\
&= \left|f(x)-f(nd)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(f((k+1)d)-f(kd)\right)+f(0)\right| \\
&\le |f(x)-f(nd)|+\sum_{k=0}^{n-1}|f((k+1)d)-f(kd)|+|f(0)| \\
&< \varepsilon+n\cdot\varepsilon+|f(0)| = (\varepsilon+|f(0)|)+n\cdot\varepsilon \\
&\le (\varepsilon+|f(0)|)+\frac{x}{d}\cdot\varepsilon
\end{aligned}
$$

e ponendo $A=\varepsilon+|f(0)|$ $\quad B=\varepsilon/d$ si ha la Tesi ∎

Vale il seguente

Teorema

$f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uniformemente continua

$g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continua

$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0$

Allora g uniformemente continua su $[0,+\infty[$

dim (non fatta a lezione)

i) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_f\ \forall x,y>0\ \ |x-y|<\delta_f \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

ii) $\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{x} : \forall x>\bar{x}\ \ |f(x)-g(x)|<\varepsilon$

iii) (Per Heine Cantor g è u.c. su $[0,\bar{x}+1]$)

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_g\ \forall x,y \in [0,\bar{x}+1]\ \ |x-y|<\delta_g \Rightarrow |g(x)-g(y)|<\varepsilon$

Sia $\delta := \min\{\delta_f, \delta_g, 1\}$

- se $x,y \in [0,\bar{x}+1]$ e $|x-y|<\delta\le\delta_g \Rightarrow$ (per la iii) $|g(x)-g(y)|<\varepsilon$
- se $x \notin [0,\bar{x}+1]$ o $y \notin [0,\bar{x}+1]$ con $|x-y|<\delta=\min\{\dots\} \Rightarrow$ ($\delta\le 1$) $x,y>\bar{x}\ \ |x-y|<\delta$

$$\Rightarrow |g(x)-g(y)| = |g(x)-f(x)+f(x)-f(y)+f(y)-g(y)|$$

$$\le \underbrace{|g(x)-f(x)|}_{\substack{<\varepsilon \\ \text{per la ii)}}} + \underbrace{|f(x)-f(y)|}_{\substack{<\varepsilon \\ \text{per la i)}}} + \underbrace{|f(y)-g(y)|}_{\substack{<\varepsilon \\ \text{per la ii)}}} < \varepsilon$$

e quindi

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall x,y\ge 0\ \ |x-y|<\delta \Rightarrow |g(x)-g(y)|<3\varepsilon$$

ovvero g è u.c. ∎

Corollario (f continua su $[0,+\infty[$ con asintoto obliquo $\Rightarrow$ f. u.c.)

Dato $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continua e t.c.

$\exists a,b \in \mathbb{R} : \lim_{x\to+\infty} (g(x) - (ax+b)) = 0$

allora g è u.c. su $[0,+\infty[$

dim

è sufficiente applicare il Teorema precedente prendendo $f(x) = ax+b$, che è u.c. su $\mathbb{R}$ ∎

Complementi

Oss (f continua su $I \not\Rightarrow \exists \lim_{x\to \inf I} f(x)$ o $\exists \lim_{x\to \sup I}$)

~~Dato~~ f continua su $]a,b[$, non è detto che esistano i limiti per $x\to a^+$ o $x\to b^-$

- $f:]0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ è continua su $]0,1]$ ma $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} 1/x \underset{y=1/x}{=} \lim_{y\to+\infty} \operatorname{sen} y$ non esiste (già verificato!)

- $f: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x \operatorname{sen} x$ è continua su $[0,+\infty[$ ma $\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} x$ non esiste (Esercizio!)

Per le funzioni uniformemente continue su intervalli limitati vale il seguente risultato

Teorema (estensione delle funzioni uniformemente continue)

Se $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ è uniformemente continua con $a,b\in\mathbb{R}$, allora $\exists \lim_{x\to a^+} f(x)$ $\exists \lim_{x\to b^-} f(x)$ finiti

dim

Proviamo che $\exists \lim_{x\to a^+} f(x)$ (il caso $x\to b^-$ è analogo)

Per ipotesi

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.c. $\forall x,y \in]a,b[\quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 :\ x,y\in]a, a-\delta[\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\Downarrow$ Vedi Teorema che segue

$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Teorema (segue da Teorema Cauchy + Teorema limiti funzioni vs limiti successioni)

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, sia x_0 p.d.a. per A. Sono tra loro equivalenti

(i) $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

(ii) $\forall \varepsilon>0\ \exists V\in \mathcal{I}_{x_0} :\ x,y\in A\cap (V\setminus\{x_0\}) \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

dim

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\quad \forall \varepsilon>0\ \exists V \in \mathcal{I}_{x_0}\quad x\in A\cap(V\setminus\{x_0\}) \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

$\qquad\qquad\qquad$ " $\quad$ " $\quad y\in$ " $\quad \Rightarrow |f(y)-\ell|<\varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : x,y \in A \cap (V \setminus \{x_0\}) \Rightarrow |f(x)-f(y)-l+l| \leq$

$\leq |f(x)-l|+|f(y)-l|<2\varepsilon$

che equivale a (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Primo passo $\forall \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0 \Rightarrow \{f(x_n)\}_n$ è di Cauchy

vale la (ii) $\forall \varepsilon>0 \ \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} \ x,y \in A \cap (V \setminus \{x_0\}) \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$x_n \to x_0 \quad \forall V \in \mathcal{I}_{x_0} \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad x_n \in V$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} \ \exists \bar{n} \ \forall n,m > \bar{n} \quad x_n, x_m \in (A \setminus \{x_0\}) \cap V \Rightarrow |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \{x_n\} \subset A \setminus \{x_0\} \ x_n \to x_0 \Rightarrow \{f(x_n)\}_n$ è di Cauchy

$\Downarrow$

$\exists \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l \in \mathbb{R}$

Secondo passo: $\forall \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\} : x_n \to x_0 \quad f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} l$

(l non dipende da $\{x_n\}$!!!)

Consideriamo due successioni $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n \subseteq A \setminus \{x_0\}$ con

$x_n \to x_0$ e $y_n \to x_0$

La successione $\{f(x_n)\}$ è di Cauchy per il punto (i) e dunque

$f(x_n) \to l$

Consideriamo la nuova successione $\{z_n\}_n$ così definita

$z_{2n} = x_n$ e $z_{2n+1} = y_n$

Questa nuova successione, per costruzione, soddisfa

$\{z_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ e $z_n \to x_0$

e dunque per il punto (i) $\{f(z_n)\}_n$ è di Cauchy

Ma una successione $\{f(z_n)\}$ di Cauchy, che contiene una sottosuccessione $\{f(z_{2n})\}_n$ t.c. $f(z_{2n}) = f(x_n) \to l$, converge pure a l ovvero $f(z_n) \to l$.

Dunque $\{f(z_{2n+1})\}_n = \{f(y_n)\}_n$, essendo una sottosuccessione di $\{f(z_n)\}_n$, deve convergere anch'essa a l ovvero $f(z_{2n+1}) = f(y_n) \longrightarrow l$.

Abbiamo provato che il limite l non dipende dalla successione scelta. Quindi si è provato che

$\forall \{x_n\}_n \subseteq A \setminus \{x_0\} \ [x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to l]$, ovvero $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$