Analisi Matematica 1 - Lezione del 6 maggio 2014

$\mathcal{M} = \{M : a_n \leq M \ \forall n > \bar{N}\}$ $\qquad \max\lim_n a_n = \inf \mathcal{M}$

$\mathcal{N} = \{N : N \leq a_n \ \forall n > \bar{N}\}$ $\qquad \min\lim_n a_n = \sup \mathcal{N}$

Teorema

$\exists \lim_n a_n = l$ <u>sse</u> $\max\lim_n a_n = \min\lim_n a_n = l$

<u>Oss</u> Mentre i limiti da sinistra e da destra non sempre esistono, il min-max limite esistono sempre

<u>Def</u> (estratta)

Data $\{a_n\}_n$ successione, una successione $\{b_n\}$ è detta "sottosuccessione" (o successione estratta) di $\{a_n\}$ se $\exists k : S \to \mathbb{N}$ crescente t.c. $b_n = a_{k_n} \ \forall n \in S$

$S =$ semiretta di $\mathbb{N}$

<u>Oss</u> $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente allora $k(n) \geq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Teorema (max e min limite sono punti limite di $\{a_n\}$)

Data una successione $\{a_n\}_n$, allora

1) $\exists \{a_{k_n}\}_n$ estratta t.c. $\lim_n a_{k_n} = \min\lim_n a_n$

2) $\exists \{a_{h_n}\}$ " " $\lim a_{h_n} = \max\lim_n a_n$

dim

Proviamo la 1) suppongo $l \in \mathbb{R}$

Sia $l = \min\lim_{n\to+\infty} a_n$

$$\left.\begin{array}{l} \forall \varepsilon>0 \quad \exists \bar{N} \;:\; \forall n>\bar{N} \quad l-\varepsilon < a_n \\ \qquad\quad \exists \infty \text{ indici } n \;:\; \qquad a_n < l+\varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \quad \exists \infty \text{ indici } \;:\; l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$$

$\varepsilon = 1 \quad \exists k_1 : \quad l-1 < a_{k_1} < l+1$

$$k_1 = \min\{k : l-1 < a_k < l+1\}$$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \exists k_2 = \min\{k > k_1 : l-\frac{1}{2} < a_k < l+\frac{1}{2}\}$

$\varepsilon = \frac{1}{3} \quad \exists k_3 = \min\{k > k_2 : l-\frac{1}{3} < a_k < l+\frac{1}{3}\}$

$\varepsilon = \frac{1}{n} \quad \exists k_n = \min\{k > k_{n-1} : l-\frac{1}{n} < a_k < l+\frac{1}{n}\}$

Ho trovato $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$
e quindi risulta individuata $\{a_{k_n}\}_n$
sottosuccessione di $\{a_n\}_n$ t.c. (per il Teorema dei Carabinieri)

$$a_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l = \min\lim_n a_n$$

Analogamente si procede per il $\max\lim_n a_n$ ////

Teorema (Bolzano Weierstrass)

Sia $\{a_n\}_n$ una successione limitata

$\Rightarrow \exists \{a_{k_n}\}_n$ sottosuccessione convergente

Oss: ogni successione infinita e limitata possiede un punto limite

dim

$\ell = \min\lim_n a_n$ essendo $\{a_n\}_n \subseteq [a,b]$

(è limitata) allora $\ell \in [a,b]$

Ma per il Teorema precedente $\exists \{a_{k_n}\}_n$ estratta con $a_{k_n} \longrightarrow \ell$ ovvero converge! $\boxed{////}$

Teorema (supA ∉ A è punto di accumulazione per A)

A : $\sup A \notin A \Rightarrow$ 1) $\sup A$ è p.d.a. per A

2) $\exists \{a_n\}_n \subseteq A$: $\lim_n a_n = \sup A$

Oss: Se A possiede un punto di accumulazione allora A ha infiniti elementi

Oss: A può avere ∞ elementi ma non avere $\sup A$ come punto di accumulazione

per esempio $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ ha ∞ elementi ma $1 = \max A = \sup A$ non è punto di accumulazione

In questo caso $\sup A \in A$!

dim

1° caso $\sup A = +\infty$

Per definizione $\forall n \in \mathbb{R}$ $\exists a_n \in A$: $n < a_n$

dunque $\exists \{a_n\} \subseteq A \quad : \quad a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Inoltre $\forall]n,+\infty[\in \mathcal{J}_{+\infty} \quad \underbrace{]n,+\infty[\cap A \neq \emptyset}_{a_n \in \text{ a questa intersezione}}$

e dunque $+\infty$ è p.d.a. per A

2) $\Lambda = \sup A \in \mathbb{R} \quad \Lambda \notin A$

per definizione $\begin{cases} a < \Lambda \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a = a(\varepsilon) \in A \ \text{t.c.} \ \Lambda - \varepsilon < a(\varepsilon) \end{cases}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \exists a_n \in A : \Lambda - 1/n < a_n < \Lambda$

$\Rightarrow \exists \{a_n\} \subseteq A \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \Lambda$

inoltre $\forall]\Lambda-\varepsilon, \Lambda+\varepsilon[\in \mathcal{J}_\Lambda \quad \underbrace{]\Lambda-\varepsilon, \Lambda+\varepsilon[\cap (A \setminus \Lambda) \neq \emptyset}_{a_n \in \text{ a questa intersezione}}$

quando $1/n < \varepsilon$

e $a_n \neq \Lambda$ in quanto

$a_n \in A$ mentre $\Lambda \notin A$

$\boxed{////}$

Oss: $A : \inf A \notin A \Rightarrow$ 1) $\inf A$ è p.d.a. per A

2) $\exists \{b_n\}_n \subseteq A \quad b_n \xrightarrow[n]{} \inf A$

e si dimostra in modo perfettamente analogo

Teorema (Weierstrass)

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\forall x \in [a,b]$ (1)

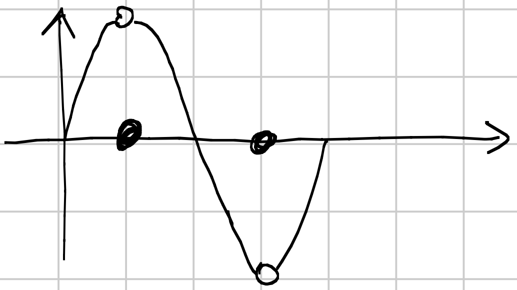
$[a,b]$ chiuso e limitato (2)

Allora $\exists\, x_m \in [a,b] : f(x_m) = \min f([a,b])$

$\exists\, x_M \in [a,b] : f(x_M) = \max f([a,b])$

Se non vale la (1) non è detto valga il Teorema Weierstrass

$f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} \sin x & x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \\ 0 & x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \end{cases}$



$\sup f(x) = 1$ non è max

$\inf f(x) = -1$ " " min

questa funzione è discontinua in $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

Se non vale la (2) non è detto valga il Teorema Weierstrass

Prendo $f(x) = e^x$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

si ha che $\sup f(\mathbb{R}) = \sup e^{\mathbb{R}} = +\infty \notin f(\mathbb{R})$

$\inf f(\mathbb{R}) = \inf e^{\mathbb{R}} = 0 \notin f(\mathbb{R})$

dim (Thm di Weierstrass)

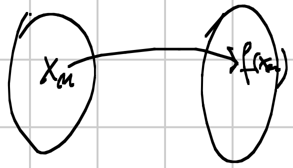
Considero $f([a,b]) \subseteq \mathbb{R}$ $\qquad f([a,b]) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, \Lambda = \sup f([a,b])$ $\qquad \lambda = \inf f([a,b])$

Proviamo che $\Lambda = \max f([a,b])$

- Se $\Lambda \in f([a,b])$ allora il Teorema è provato!
- Se $\Lambda \notin f([a,b])$ allora $\exists \{y_n\}_n \subseteq f([a,b])$ t.c.

per il teorema precedente



$$y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Lambda$$

$$\Rightarrow \exists \{x_n\}_n \subseteq [a,b] \; : \; f(x_n) = y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Lambda$$

Ora $\{x_n\}_n \subseteq [a,b] \overset{B.W.}{\Longrightarrow} \exists \{x_{k_n}\}_n$ estratto $x_{k_n} \xrightarrow[n]{} x_M$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = f(x_M) \quad (*)$$

f è continua in x_M

Ma $\{f(x_{k_n})\}_n = \{y_{k_n}\}_n$, ovvero è un'estratto di $\{y_n\}_n$

$$\Longrightarrow f(x_{k_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Lambda \qquad (**)$$

se una successione ha limite, tutte le estratte hanno = limite

$$\Downarrow$$

$$\Lambda \overset{(**)}{=} \lim_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) \overset{(*)}{=} f(x_M)$$ che è la Tesi

Per il minimo si ragiona analogamente $\boxed{///}$

TEOREMA DI CAUCHY

Dato una successione, come posso dire chi sia $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$?

Debbo calcolarlo

Se desidero sapere se esiste o meno il $\lim_n a_n$, come posso fare?

Una risposta al quesito "esiste il limite di a_n" è data da

Teorema

$\{a_n\}_n$ monotona crescente (decrescente)

allora $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_n a_n \quad \left(\inf_n a_n\right)$

E se non è monotona $\{a_n\}_n$? Come posso stabilire se $\exists$ o meno il limite?

Def (Successione di Cauchy)

$\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ diciamo che questa è una "successione di Cauchy"

se $\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 : \forall n,m>\bar{n} \qquad |a_n-a_m|<\varepsilon$

N.B. Fate il parallelo con la def. di UNIFORME CONTINUITÀ !!

N.B. Non compare il limite esplicitamente

Teorema

Se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ allora $\{a_n\}_n$ è di Cauchy

dim

Dall'ipotesi segue $\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n} : \forall n>\bar{n} \quad |a_n-\ell|<\varepsilon/2$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{m} : \forall m>\bar{m} \quad |a_m-\ell|<\varepsilon/2$

$$|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |l - a_m|$$
$$= |a_n - l| + |a_m - l|$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \ \forall n,m > \bar{n} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

////

Teorema (viceversa del precedente)

$\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$

Se $\{a_n\}_n$ è di Cauchy allora $\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

dim

1) $\{a_n\}_n$ Cauchy $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ è limitato

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n,m > \bar{n} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\varepsilon = \pi \ \exists \bar{n} : \ \forall n,m > \bar{n} \qquad -\pi < a_n - a_m < \pi$

$\Downarrow$

$\varepsilon = \pi \ \exists \bar{n} : \ \forall n > \bar{n} \quad m = \bar{n}+1 \qquad \underbrace{a_{\bar{n}+1} - \pi}_{\text{fissato}} < a_n < \underbrace{a_{\bar{n}+1} + \pi}_{\text{fissato}}$

$K = \max\{|a_0|, \dots, |a_{\bar{n}}|\}$ si ha che

$\forall n \qquad |a_n| < \max\{K, |a_{\bar{n}+1}| + \pi\}$

2) $\{a_n\}_n$ limitata $\xRightarrow[\text{B.W.}]{}$ $\exists \{a_{k_n}\}_n \quad a_{k_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$

3) $\{a_n\}_n$ Cauchy ed $\exists \{a_{k_n}\}_n$ convergente a $l \in \mathbb{R}$ allora $\{a_n\}_n$ converge a l

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 : \forall n > n_1 \quad |a_{k_n} - l| < \varepsilon/2$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 : \forall n, m > n_2 \quad |a_n - a_m| < \varepsilon/2$

$$|a_n - l| = |a_n - a_{k_n} + a_{k_n} - l| \le$$

$$\le |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - l|$$

$n > n_1 \vee n_2 \Rightarrow k_n > n_1 \vee n_2 \qquad < \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon/2 = \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = n_1 \vee n_2 \ \forall n > \bar{n} \quad |a_n - l| < \varepsilon$ ///

Esempio $\sum_n 1/n$ diverge

$b_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ dice

la successione $\{b_n\}_n$ è a valori positivi ed inoltre è monotona crescente strettamente

Infatti $b_1 = 1 > 0 \qquad b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} 1/k + \frac{1}{n+1} > b_n$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} b_n$ che può essere finito o $+\infty$

Per provare che $\lim_n b_n = +\infty$ proverò che non converge dimostrando che $\{b_n\}$ NON È di Cauchy

$$\underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termini}} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termini}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\varepsilon = 1/2 \quad \forall \bar{n}_{-1} \ \exists n, m > \bar{n} : b_n - b_m \geq 1/2$

$\rightarrow \varepsilon = 1/2 \quad \forall \bar{n}_{-1} \ \exists n = \bar{n} \quad m = 2\bar{n} : b_{2\bar{n}} - b_{\bar{n}} = \frac{1}{2\bar{n}} + \dots + \frac{1}{\bar{n}+1} \geq 1/2$

ho negato la def di successione di Cauchy

$\neg\left(\forall\varepsilon>0\ \exists\bar{n}:\ \forall n,m>\bar{n}\quad |a_n-a_m|<\varepsilon\right) -$

$\exists\varepsilon>0\ \forall\bar{n}>0\ \exists n,m>\bar{n}\quad |a_n-a_m|\geq\varepsilon$

Teorema (Corollario Weierstrass su intervallo illimitato)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua

1) Se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty=\lim_{x\to-\infty} f(x)$

allora $\exists\, x_m\in\mathbb{R}:\ f(x_m)=\min f(\mathbb{R})$

2) Se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty=\lim_{x\to-\infty} f(x)$

allora $\exists\, x_M\in\mathbb{R}:\ f(x_M)=\max f(\mathbb{R})$

Teorema (Corollario Weierstrass)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua

1) Se $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell$

ed esiste $x_0\in\mathbb{R}:\ f(x_0)>\ell$

allora $\exists\, x_M\in\mathbb{R}:\ f(x_M)=\max f(\mathbb{R})$

1) Se $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell$

ed esiste $x_0\in\mathbb{R}:\ f(x_0)<\ell$

allora $\exists\, x_m\in\mathbb{R}:\ f(x_m)=\min f(\mathbb{R})$