Analisi Matematica 1 - Lezione del 5 maggio 2014

Il numero e

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

- $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è strett. crescente

dim

$$\frac{e_n}{e_{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)} \underset{\text{Dis Bernoulli}}{>} \cancel{\left(1-\frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{1}{\cancel{\left(1-\frac{1}{n}\right)}} = 1$$

- e_n è strett. crescente $\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} e_n$

$e_1 = 2 < e_n \quad \forall n > 1$

- $e_n < 3$

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}\,\frac{1}{k!}$$

$$\leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{h=0}^{n-1}\frac{1}{2^h}$$

$$< 1 + \sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{2^h} = 1+2 = 3 \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Dunque $\quad 2 < e = \lim_{n\to+\infty} e_n < 3$

LA FUNZIONE ESPONENZIALE

$$e^x$$

- e^x può essere vista come l'unica soluzione di $\begin{cases} y' = y \\ y(0)=1 \end{cases}$
- e^x può essere riguardato come la somma di una serie
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

La nostra definizione è $e^x := \lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

1) $e_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n > \bar{n} = \lfloor |x| \rfloor + 1$

dim

$\left|\frac{x}{n}\right| < 1$ se $n > |x|$ e dunque

$\forall x \in \mathbb{R}$ fissato, $\forall n > \overbrace{\lfloor |x| \rfloor}^{\text{parte intera di } x} + 1 = \bar{n} \qquad 1+\frac{x}{n} > 0$

$\Downarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}$ fissato $\forall n > \bar{n} \qquad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n > 0$

- $e_n(x)$ è strettamente crescente $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n > \bar{n}$

$$\frac{e_n(x)}{e_{n-1}(x)} = \left(\frac{n+x}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n-1+x}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1+x}{n-1}\right)$$

$$= \left(\frac{n(n-1+x)-x}{n(n-1+x)}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(\frac{n-1+x-x}{n-1+x}\right)}$$

$$= \left(1-\frac{x}{n(n-1+x)}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n-1+x}\right)}$$

Bernoulli per $n > \bar{n}$

$$> \left(1-\cancel{\frac{x}{n-1+x}}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{\left(1-\frac{x}{n-1+x}\right)}} = 1$$

- essendo $e_n(x)$ strettamente crescente $\forall x\in\mathbb{R}$, allora $\exists \lim_{n\to+\infty} e_n(x) = e^x$

- $e^x\in\mathbb{R} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$$e_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{n\cdot n\cdot \cdots \cdot n}\cdot\frac{x^k}{k!}$$

$$\leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{|x|^k}{k!} < 1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^k}{k!} < +\infty$$

in quanto $\dfrac{\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{x^k}{k!}\right|} = \dfrac{|x|}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

e dunque $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^k}{k!}\in\mathbb{R} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Ne segue che $\lim_{n\to+\infty} e_n(x) = e^x \leq 1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^k}{k!}\in\mathbb{R}$

- $e^x \geq 1+x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$e_n(x)$ è crescente $\forall x\in\mathbb{R} \quad \forall n>\bar{n} = \lfloor |x| \rfloor+1$

$e_n(x) > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \forall n>\bar{n} = \lfloor |x| \rfloor+1$

$\Rightarrow e^x \geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Dunque debbo provare la disuguaglianza solo quando $x\geq 0$

$e_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+n\frac{x}{n} = 1+x \quad \forall x\geq 0 \quad \forall n\geq 1$

$\Rightarrow \lim_{n} e_n(x) = e^x \geq 1+x \quad \forall x\geq 0$

- $e^x \leq 1+xe^x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Dalla disug. $e^y\geq 1+y \quad \forall y\in\mathbb{R} \Rightarrow_{y=-x} e^{-x}\geq 1-x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow 1\geq e^x - xe^x \quad \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow 1+xe^x\geq e^x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Vale il seguente Teorema

Teorema: $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

dim

Abbiamo provato $e \le \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$

Viceversa si considera $1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{\cancel{n} \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{\cancel{n} \cdot n \cdot \cdots n} \frac{1}{k!}$

$$P_k = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-i}{n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$P_n \ge P_m \quad \forall\, n < m \quad$ (i fattori sono < 1)

dunque $1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} P_k \cdot \frac{1}{k!}$

Massimo e minimo limite

Esempio: $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ non ha limite

Però $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim_n \left(1+\frac{1}{2n}\right) = 1$

$\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim_n \left(-1+\frac{1}{2n+1}\right) = -1$

$1 \neq -1$

Def (maggiorante definitivo di $\{a_n\}$)
M è "maggiorante definitivo" di $\{a_n\}_n$
se $\exists \nu : \forall n > \nu \quad a_n \leq M$

$$\mathcal{M} = \{\text{maggioranti definitivi di } \{a_n\}\}$$

Oss: $\{\text{maggioranti di } \{a_n\}\} \subseteq \mathcal{M}$

in generale è stretta l'inclusione

Def ($\max\lim_n a_n$) massimo limite di a_n
Diciamo che $L = \max\lim_{n\to\infty} a_n$ se $L = \inf \mathcal{M}$

Def (minorante definitivo di $\{a_n\}$)
N è "minorante definitivo" di $\{a_n\}_n$
se $\exists \nu : \forall n > \nu \quad a_n \geq N$

$$\mathcal{N} = \{\text{minoranti definitivi di } \{a_n\}\}$$

Oss: $\{\text{minoranti di } \{a_n\}\} \subseteq \mathcal{N}$

in generale l'inclusione è stretta

Def (minimo limite)
Diciamo che $\ell = \min\lim_{n\to\infty} a_n$ se $\ell = \sup \mathcal{N}$

massimo limite di a_n

OSS: $\max\lim a_n$ e $\max\lim a_n$ esistono sempre (eventualmente $+\infty$ o $-\infty$) in quanto $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\inf \mathcal{M}$ e $\sup \mathcal{N}$ esistono (eventualmente illimitati)

OSS: M maggiorante $\Rightarrow$ M maggiorante definitivo
$\not\Leftarrow$ in generale

Presa $\{a_n\}_n = \{\frac{1}{n}\}_{n \geq 1}$ si ha $\mathbb{M}_{\{a_n\}_n} = [1, +\infty[$
mentre $\mathcal{M} =]0, +\infty[$

Infatti, $\frac{1}{100}$ non è maggiorante, mentre
$\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ $\forall n > 100 \Rightarrow \frac{1}{100} \in \mathcal{M}$

Def Dato $\{a_n\}_n$, un punto $p \in \mathbb{R}$ si dice "punto limite di $\{a_n\}$"
se $\exists \{a_{k_n}\}_n$ estratta t.c. $\lim_{n \to +\infty} a_{k_n} = p$

Esempio ① $\{(-1)^n\}$ ha due punti limite $A = \{\pm 1\}$

② $\{\frac{1}{n}\}$ " 1 punto limite $A = \{0\}$

Esempio Calcolare $\max\lim a_n$ e $\min\lim a_n$
quando $\{a_n\}_n = \{\frac{(-1)^n}{n}\}_n$

dim

$\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots\}$

Insieme maggioranti $\equiv [\frac{1}{2}, +\infty[$ $\Rightarrow \sup\{a_n\} = \frac{1}{2}$

" " definitivi $\equiv]0, +\infty[$ $\Rightarrow \max\lim_n a_n = 0$

Insieme minoranti $=]-\infty, -1] \Rightarrow \inf\{a_n\} = -1$

" " definitivi $=]-\infty, 0[\Rightarrow \min\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

In particolare si ottiene che $\lim_n a_n = 0$.

OSS (Importante ed immediata)

$$\min\lim_{n\to\infty} a_n \leq \max\lim_{n\to\infty} a_n \quad \forall \{a_n\}_n$$

Teorema

Data $\{a_n\}_n$, allora sono equivalenti

i) $\exists \lim_n a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

ii) $\exists \min\lim_n a_n = \max\lim_n a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

dim

i) $\Rightarrow$ ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \ell - \varepsilon \in \mathcal{N}$ e $\ell + \varepsilon \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \ell - \varepsilon < \sup \mathcal{N} \leq \inf \mathcal{M} < \ell + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \ell - \varepsilon < \min\lim_n a_n \leq \max\lim_n a_n < \ell + \varepsilon$

$\Rightarrow \quad \min\lim_n a_n = \max\lim_n a_n = \ell$

ii) $\Rightarrow$ i) $\quad \min\lim_n a_n = \sup \mathcal{N} = \ell \qquad \max\lim_n a_n = \inf \mathcal{N} = \ell$

inf M

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \ell - \varepsilon \in \mathcal{N}$ e $\ell + \varepsilon \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \ \forall n > N_1 \quad \ell - \varepsilon < a_n$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 \ \forall n > N_2 \quad a_n < \ell + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \overline{N} = N_1 \vee N_2 \quad \forall n > \overline{N} \quad l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$

$\Rightarrow \lim_n a_n = l$ ▥

Teorema

Comunque si prenda $\{a_n\}_n$

(i) $\max\lim_n a_n = \inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq N} a_k \ (= \inf \mathcal{M})$

(ii) $\min\lim_n a_n = \sup_{N\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq N} a_k \ (= \sup \mathcal{N})$

dim

(i) $\lambda_N = \sup_{k\geq N} a_k \in \mathcal{M} \quad \forall N\in\mathbb{N} \quad (\lambda_N \geq a_k \ \forall k\geq N)$

$\Rightarrow \max\lim_n a_n = \inf \mathcal{M} \leq \lambda_N \quad \forall N\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \max\lim_n a_n \leq \inf_{N\in\mathbb{N}} \lambda_N = \inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq N} a_k$

viceversa

Preso $L\in\mathcal{M} \Rightarrow \exists n_0 : \forall k\geq n_0 \quad a_n \leq L$

$\Rightarrow \forall L\in\mathcal{M} \quad \exists n_0 : \sup_{k\geq n_0} a_k = \lambda_{n_0} \leq L$

ma $\inf_{N\in\mathbb{N}} \lambda_N = \inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq N} a_k \leq \lambda_{n_0}$

$\Rightarrow \inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq N} a_k \leq L \quad \forall L\in\mathcal{M}$

$\Rightarrow \inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq N} a_k \leq \inf \mathcal{M} = \max\lim_n a_n$

e dunque $\max\lim_n a_n = \inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq N} a_k$

analogamente si prova $\min\lim_n a_n = \sup_{N\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq N} a_k$ ▥

Teorema

1) $\ell = \min\lim_{n} a_n$ sse $\forall \varepsilon>0\ \exists N : \forall n>N\ \ \ell-\varepsilon<a_n$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \infty$ indici : $a_n<\ell+\varepsilon$

2) $L = \max\lim a_n$ sse $\forall \varepsilon>0\ \exists N : \forall n>N\ \ a_n<\ell+\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \infty$ indici $\ell-\varepsilon<a_n$

dim

1) $\ell = \sup \mathcal{N} \iff \forall \varepsilon>0\ \ \ell-\varepsilon \in \mathcal{N}$

$\ell+\varepsilon \notin \mathcal{N}$

$$\iff \begin{cases} \forall \varepsilon>0 \begin{cases} \exists N : \forall n>N \quad \ell-\varepsilon<a_n \\ \text{non}\ (\exists N\ \forall n>N\ \ \ell+\varepsilon<a_n) \end{cases} \end{cases}$$

$\iff \forall \varepsilon>0\ \ \exists N : \forall n>N\ \ \ell-\varepsilon<a_n$

$\forall N : \exists n>N\ \ a_n<\ell+\varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon>0\ \ \exists N\ \ \forall n>N\ \ \ell-\varepsilon<a_n$

$\exists \infty$ indici $\quad a_n<\ell+\varepsilon$

Analogamente si procede per il $\max\lim_{n}$ ////