

La funzione esponenziale e^x

e = costante di Eulero = 2,71828....

Si considera la funzione $f(x) = e^x$ che gode delle seguenti proprietà:

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$

2) $e^0 = 1$

3) $e^{x+y} = e^x e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

4) $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Da queste 4 proprietà seguono tutte le altre proprietà di e^x

5) $e^{-x} = 1/e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

infatti $1 = e^0 = e^{x+(-x)} = e^x \cdot e^{-x} \Rightarrow e^{-x} = 1/e^x$

6) e^x è strettamente crescente

Bisogna provare che

$$x < y \Rightarrow e^x < e^y$$

" " " $0 < y-x \Rightarrow 1/e^x < e^y$

" " " $0 < y-x \Rightarrow 1 < e^y \cdot e^{-x}$

" " " $0 < y-x \Rightarrow 1 < e^{y-x}$

$$\forall z \quad e^{(y-x)} \geq 1 + (y-x) > 1$$

$\uparrow$ (4)
 $\uparrow$ in quanto $y-x > 0$

Quindi: $y > x \Rightarrow y-x > 0 \Rightarrow e^{y-x} > 1 \Rightarrow e^y > e^x$

7) $e^x \leq 1 + xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Seg. $e^x(1-x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Seg. $\frac{1}{e^x}(1-x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Seg. $1-x \leq e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Seg. $1+(-x) \leq e^{(-x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

e questo segue dalla (4)

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

(4) $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (Per il Teorema del Confronto)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$

cambio variabile
 $y = -x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{-x}} \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^y} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0^+$$

10) e^x è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

(i) $e^0 = 1$ e^x è continua in $x=0$

$$\begin{array}{ccccc} & \textcircled{4} & & \textcircled{7} & \textcircled{6} \text{ quando } x < 1 \\ & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 1+x & \leq e^x & \leq & 1+x \cdot e^x & \leq 1+x e \\ \underbrace{}_{x \rightarrow 0 \downarrow 1} & & & & \underbrace{}_{x \rightarrow 0 \downarrow 1} \end{array}$$

$\Rightarrow$ (Teorema dei 2 carabinieri) $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$

Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, devo provare $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & \parallel & \parallel \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (e^x - e^{x_0}) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & \parallel & \parallel \\ \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x_0} (e^{x-x_0} - 1) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & \parallel & \parallel \\ e^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (e^{x-x_0} - 1) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & \parallel & \parallel \\ e^{x_0} \lim_{(x-x_0) \rightarrow 0} (e^{x-x_0} - 1) = 0 \end{array}$$

Cambio variabile nel limite $y = x - x_0$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & \parallel & \parallel \\ e^{x_0} \lim_{y \rightarrow 0} (e^y - 1) = 0 \end{array}$$

Ma $\lim_{y \rightarrow 0} (e^y - 1) = 0$ segue dalla continuità di e^y in $y=0$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Si sa che

$$1+x \leq e^x \leq 1+x e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x \leq e^x - 1 \leq x e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x > 0 \Rightarrow 1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x$$

$$x < 0 \Rightarrow e^x \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq 1$$

$$\underbrace{\min\{1, e^x\}}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 0 \\ 1}} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \underbrace{\max\{1, e^x\}}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 0 \\ 1}} \quad \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow (\text{Thm dei 2 carabinieri}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Per } b) \text{ ④ } e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x = (e^{x/2})^2 \geq \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{4} \geq \frac{x^2}{4} \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow e^x = (e^{x/3})^3 \geq \left(1 + \frac{x}{3}\right)^3 \geq \frac{x^3}{27} \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow e^x = (e^{x/(k+1)})^{k+1} \geq \left(1 + \frac{x}{k+1}\right)^{k+1} \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} \quad \forall x \geq 0$$

$$\text{dunque} \quad \frac{e^x}{x^k} \geq \frac{1}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{x^{k+1}}{x^k} = \frac{x}{(k+1)^{k+1}} \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(\text{Per il Teorema del confronto} \right) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} \geq +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(k+1)^{k+1}}$$

La funzione logaritmo $\log_e x$

$$f(x) = e^x$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$$

• f continua $\forall x \in \mathbb{R}$

• f strettamente crescente su $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f^{-1}:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{funzione inversa di } f=e^x)$$

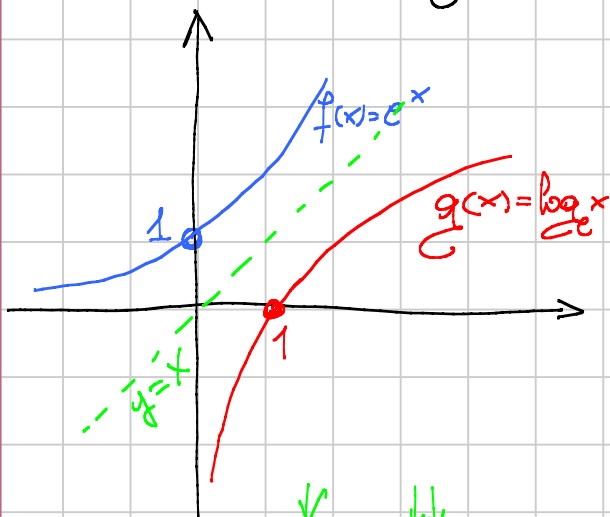
• f^{-1} continua $\forall x \in]0, +\infty[= f(\mathbb{R})$

• f^{-1} strettamente crescente

$$\begin{cases} f^{-1}(f(x)) = \log_e(e^x) = x & \forall x \in \mathbb{R} \\ f(f^{-1}(x)) = e^{\log_e x} = x & \forall x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

$$\begin{cases} f^{-1}(f(x)) = \log_e(e^x) = x & \forall x \in \mathbb{R} \\ f(f^{-1}(x)) = e^{\log_e x} = x & \forall x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

La funzione inversa è il logaritmo in base e
 $\log_e x$



$$g(x) = \log_e(x) = f^{-1}(x)$$

$$1) f(x) = e^x \quad f: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$$

$$1) f^{-1}(x) = \log_e x \quad f^{-1}:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$2) e^0 = 1 \quad (0, 1) \in \text{graf}(e^x)$$

$$2) \log_e 1 = 0 \quad (1, 0) \in \text{graf}(\log_e x)$$

$$3) e^{x+y} = e^x e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$4) \log_e x + \log_e y = \log_e(x \cdot y) \quad \forall x, y \in]0, +\infty[$$

$$e^{\log_e x + \log_e y} = e^{\log_e x} e^{\log_e y}$$

$$= x \cdot y$$

$$e^{\log_e(x \cdot y)} = x \cdot y$$

e quindi è verificato

$$4) e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



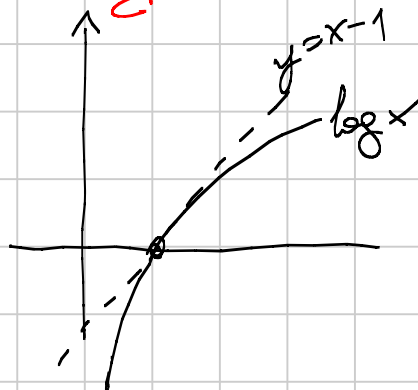
$$e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x = \log y \quad y > 0$$

$$e^{\log y} \geq 1 + \log y \quad \forall y > 0$$

$$y \geq 1 + \log y \quad \forall y > 0 \quad \Rightarrow \quad y-1 \geq \log y \quad \forall y > 0$$

$$5) \log x \leq x-1 \quad \forall x > 0$$



$$5) e^x = 1/e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$5) \log x = -\log 1/x \quad \forall x > 0$$

$$e^{\log x} = x \quad \checkmark \quad e^{-\log 1/x} = \frac{1}{e^{\log 1/x}} = \frac{1}{1/x} = x$$

6) e^x strettamente crescente

7) $\log x$ strettamente crescente

conseguenza diretta del Teorema di esistenza della funzione inversa continua

$$7) e^x \leq 1+x e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$8) \frac{x-1}{x} \leq \log x \quad \forall x > 0$$

$$\Downarrow \text{pongo } x = \log y \quad \forall y > 0$$

$$e^{\log y} \leq 1 + \log y \cdot e^{\log y} \quad \forall y > 0$$

$$y \leq 1 + y \cdot \log y \quad \forall y > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y-1}{y} \leq \log y \quad \forall y > 0$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$$

x assurdo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = M < +\infty$
 $\Rightarrow +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\log x} = e^M$
 Assurdo $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$

$$9) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x &= \lim_{y = \frac{1}{x} \quad y \rightarrow +\infty} \log \frac{1}{y} \\
 &= - \lim_{y \rightarrow +\infty} \log y = -\infty
 \end{aligned}$$

$$10) e^x \text{ \u00e9 continua } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$10) \log x \text{ \u00e9 continua } \forall x > 0$$

Segue dal Teorema di esistenza
 della funzione inversa: se f \u00e9
 stret. crescente e continua allora
 f^{-1} \u00e9 stret. crescente e continua

Altrimenti, si procede come per l'esponenziale

$$\text{In } x=1 \quad \log x \text{ \u00e9 continua e } \lim_{x \rightarrow 1} \log x = \log 1 = 0$$

$$\text{infatti } \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 1 \\ 0}} \leq \log x \leq \underbrace{x-1}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 1 \\ 0}} \quad \forall x > 0$$

$$\text{e per il Teorema dei 2 Corollari } \lim_{x \rightarrow 1} \log x = \log 1 = 0$$

Quando prendo $x_0 > 0$ debbo provare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log x = \log x_0 \quad \text{ovvero} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \log \frac{x}{x_0} = 0$$

Si ha che

$$1 - \frac{1}{\frac{x}{x_0}} \leq \log \frac{x}{x_0} \leq \frac{x}{x_0} - 1 \quad \forall x > 0 \quad \forall x_0 > 0$$

$$1 - \frac{x_0}{x} \leq \log \frac{x}{x_0} \leq \frac{x - x_0}{x_0}$$

$$\frac{x - x_0}{x} \leq \log \frac{x}{x_0} \leq \frac{x - x_0}{x_0}$$

$$\downarrow x \rightarrow x_0$$

$$\downarrow x \rightarrow x_0$$

$$\Rightarrow (\text{Thm dei 2 Corollari})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log \frac{x}{x_0} = 0$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Quando $x \rightarrow 0$ si ha $y = e^x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

$y = e^x - 1$
 $y + 1 = e^x$
 $\log(y+1) = x$

↑
ponendo ai reciproci

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^k}{x} = 0$$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$$+\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{(\log y)^k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

ponendo ai reciproci $\Rightarrow$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(\log y)^k}{y} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Esercizio: Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x$

dim

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\log \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log y}{y} = 0^-$$

$y = \frac{1}{x}$

(In fatti $\log y > 0$ per $y \rightarrow +\infty$ $\Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log y}{y} = 0^+$)

$y > 0$ " " "

Potenza a esponente reale x^q

Problema: mentre è chiaro cosa significa

$$x^m = x \cdot x^{m-1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall m \geq 1$$

come pure è chiaro, per ogni $x \geq 0$

$$x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$$

Non è chiaro cosa sia $x^{\sqrt{2}}$, ovvero una Potenza a Esponente Reale.

Def comunque si prenda $x > 0$

definiamo

$$x^q := e^{q \cdot \log x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2^3 = e^{3 \log 2} = e^{\log 2 + \log 2 + \log 2} = e^{\log 2^3}$$

$$2^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2} \log 2} = e^{3 \log \sqrt{2}} = e^{\log (\sqrt{2})^3} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$2^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \log 2} \quad (\text{ovvero } 2 \mapsto \sqrt{2} \log 2 \mapsto e^{\sqrt{2} \log 2})$$

Quindi si dà un senso a q^x per $q > 0, x \in \mathbb{R}$

$$q^x = e^{x \log q}, \quad q > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x \log q \mapsto e^{x \log q} = q^x$$

Esercizio: Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{q^x}{x^k}$

al variare di $q > 0$ e $k \in \mathbb{N}$

dim
 $q=1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1^x}{x^k} = 0 \quad \forall k \geq 1$

$$q \neq 1 \quad \frac{q^x}{x^k} = \frac{e^{x \log q}}{e^{k \log x}} = e^{x \log q - k \log x} =$$

$$= e^{x \left(\log q - k \frac{\log x}{x} \right)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 0 & 0 < q < 1 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$