Analisi Matematica 1 - Lezione del 29 aprile 2014

Esercizio Determinate tutte le soluzioni di $|z|^2 - z^2 = i$

dim

In questo caso non conviene sostituire direttamente $z = a+ib$, poiché troverei una eq. di 4° grado.
Passando ai moduli si trova

$$\left| |z|^2 z^2 \right| = |i| \iff |z|^4 = 1 \iff |z|^2 = 1$$

e dunque la ns. equazione diventa

$$z^2 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i \,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}$$

$\Downarrow$ ← radici n-esime in $\mathbb{C}$

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad z_1 = \cos\frac{5}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esercizio: Determinare le soluzioni di

$$(*) \begin{cases} i\bar{z}\omega = \bar{\omega}^2 \\ iz\bar{\omega} = z^2 \end{cases} \quad \text{t.c. } |\omega| = 2$$

dim

(*) equivale a (passando al coniugato)

$$\begin{cases} \overline{(i\bar{z}\omega)} = \overline{(\bar{\omega}^2)} \\ iz\bar{\omega} = z^2 \\ |\omega| = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} -iz\bar{\omega} = \omega^2 \\ iz\bar{\omega} = z^2 \\ |\omega| = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z^2 = -\omega^2 \\ z^2 = iz\bar{\omega} \\ |\omega| = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} z^2 = -\omega^2 \\ z = i\bar{\omega} \\ |\omega| = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = i\omega \\ i\omega = i\bar{\omega} \\ |\omega| = 2 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} z = -i\omega \\ -i\omega = i\bar{\omega} \\ |\omega| = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} z = i\omega \\ \mathrm{Im}\,\omega = 0 \\ |\omega| = 2 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} z = -i\omega \\ \mathrm{Re}\,\omega = 0 \\ |\omega| = 2 \end{cases}$$

posto $z = a+ib$ $\quad \omega = c+id$

$$\begin{cases} a+ib = i\cdot c \\ d = 0 \\ |c| = 2 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} a+ib = d \\ c = 0 \\ |d| = 2 \end{cases}$$

e quindi $\begin{cases} a=0 \\ b=c \\ d=0 \\ c=\pm 2 \end{cases}$ o $\begin{cases} a=d \\ b=0 \\ c=0 \\ d=\pm 2 \end{cases}$ e infine

$$(z_1, w_1) = (2i, 2) \quad (z_2, w_2) = (-2i, -2)$$

$$(z_3, w_3) = (2, 2i) \quad (z_4, w_4) = (-2, -2i) \quad ▥$$

Esercizio: Determinare le soluzioni di

$$z^3 \bar{z} + 3z^2 - 4 = 0$$

dim

L'equazione diventa $z^2 \cdot |z|^2 + 3z^2 - 4 = 0$ $(*)$

ovvero $z^2(|z|^2+3) = 4$

ovvero $z^2 = \frac{4}{|z|^2+3} \Rightarrow |z^2| = \left|\frac{4}{|z|^2+3}\right| = \frac{4}{|z|^2+3}$

da cui segue che $|z|^2$ soddisfa l'equazione $|z|^4 + 3|z|^2 = 4$

e dunque $|z|^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Rightarrow \boxed{|z|^2 = 1}$

Dunque l'equazione $(*)$ diventa $4z^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z_0 = 1$ e $z_1 = -1$ ▥

Esercizio: Trovare tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} \left|\frac{w}{2}\right| = |z| = \sqrt{2} \\ 2z + w = 4 \end{cases} \quad (*)$$

dim

$(*)$ diventa $\begin{cases} |w| = 2\sqrt{2} \\ |z| = \sqrt{2} \\ 2z + w = 4 \end{cases}$ $\quad z = a+ib$, $w = c+id$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c^2+d^2 = 8 \\ a^2+b^2 = 2 \\ 2a+2ib+c+id = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+c=4 \\ 2b+d=0 \\ c^2+d^2=8 \\ a^2+b^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} c = 4-2a \\ d = -2b \\ 16+4a^2-16a+4b^2 = 8 \\ b^2 = 2-a^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c = 4-2a \\ d = -2b \\ b^2 = 2-a^2 \\ 8+\cancel{4a^2}-16a+8-\cancel{4a^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \\ b = \pm 1 \\ d = -(\pm 2) \end{cases} \Longleftrightarrow (z_1, w_1) = (1+i; 2-2i)$$

$$(z_2, w_2) = (1-i, 2+2i)$$

Aperta parentesi

posto $f(\theta) = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e si ha $f(0) = 0$

$$f(-\theta) = \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)$$
$$= \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$$
$$= \frac{1}{\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{f(\theta)}$$

$$f(\theta) \cdot f(\varphi) = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$
$$= (\cos(\theta+\varphi) + i \operatorname{sen}(\theta+\varphi))$$
$$= f(\theta+\varphi)$$

dunque questa funzione soddisfa tutte le proprietà formali di e^x, e quindi possiamo definire

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

In questo modo si ha

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

e questa funzione - l'esponenziale complesso risulta essere l'estensione al piano $\mathbb{C}$ della funzione esponenziale

Ne segue che possiamo esprimere $\cos\vartheta$ e $\operatorname{sen}\vartheta$ in funzione di $e^{i\vartheta}$ in quanto

$$\operatorname{sen}\vartheta = \frac{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}{2i} \qquad \cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2}$$

formalmente queste espressioni sono simili alla definizione del seno e coseno iperbolico

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

Una curiosità:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} z &= \operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cos(iy) + \operatorname{sen}(iy)\cos x \\
&= \operatorname{sen} x \cdot \frac{e^{i(iy)}+e^{-i(iy)}}{2} + \frac{e^{i(iy)}-e^{-i(iy)}}{2i} \cdot \cos x \\
&= \operatorname{sen} x \cdot \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} + \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} \cdot \cos x \\
&= \operatorname{sen} x \cosh y + \frac{1}{i}\left(-\operatorname{senh} y\right)\cos x \\
&= \operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{senh} y \cos x
\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
\cos z &= \cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(iy) \\
&= \cos x \, \frac{e^{i(iy)}+e^{-i(iy)}}{2} - \operatorname{sen} x \, \frac{e^{i(iy)}-e^{-i(iy)}}{2i} \\
&= \cos x \cosh y - \frac{1}{i} \operatorname{sen} x \left(-\operatorname{senh} y\right) \\
&= \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y
\end{aligned}$$

Chiusa parentesi

Esercizio Determinare tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} z^3 = z \\ |w| = 3|z| \\ \bar{z}w + z\bar{w} = 2 \end{cases}$$

dim

$z=0$ NON È SOLUZIONE (la 3ª eq. diventa $0=2$)
e dunque (*) equivale a

$$\begin{cases} z^2 = 1 \\ |w| = 3|z| \\ \bar{z}w + z\bar{w} = 2 \end{cases} \quad \underline{sse} \quad \begin{cases} z = 1 \\ |w| = 3 \\ w + \bar{w} = 2 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} z = -1 \\ |w| = 3 \\ w + \bar{w} = -2 \end{cases}$$

$$\underline{sse} \quad \begin{cases} z = 1 \\ \mathrm{Re}\, w = 1 \\ 1 + (\mathrm{Im}\, w)^2 = 9 \end{cases} \quad o' \quad \begin{cases} z = -1 \\ \mathrm{Re}\, w = -1 \\ 1 + (\mathrm{Im}\, w)^2 = 9 \end{cases}$$

$$sse \quad \begin{cases} z = 1 \\ w = 1 \pm 2\sqrt{2}\, i \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} z = -1 \\ w = -1 \pm 2\sqrt{2}\, i \end{cases}$$

Esercizio: Determinare tutte le soluzioni di

$$(*) \begin{cases} 3z - i|w| = i + \bar{z} \\ w - 2|z| = 4i \end{cases}$$

dim

(*) equivale a $\begin{cases} 2z = i|w| + i + \bar{z} - z \\ w - 2|z| = 4i \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z = i\left(|w| + 1 - 2\,\mathrm{Im}\, z\right) \\ w = 2|z| + 4i \end{cases} \qquad \begin{matrix} z = a + ib \\ w = c + id \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2b = (c^2+d^2)^{\frac{1}{2}} + 1 - 2b \\ c + id = 2|b| + 4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 4b - 1 = (c^2+16)^{\frac{1}{2}} \\ c = 2|b| \\ d = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ d = 4 \\ c = 2|b| \\ 16b^2 + 1 - 8b = 4b^2 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ d = 4 \\ c = 2|b| \\ 12b^2 - 8b - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=0 \\ d=4 \\ c=2|b| \\ b_{1,2} = \dfrac{4\pm\sqrt{196}}{12} \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=\dfrac{3}{2} \\ c=3 \\ d=4 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} a=0 \\ b=-\dfrac{5}{6} \\ c=\dfrac{5}{3} \\ d=4 \end{cases}$$

$$(z_1, w_1) = \left(\frac{3}{2}i\,;\ 3+4i\right) \qquad (z_2, w_2) = \left(-\frac{5}{6}i\,;\ \frac{5}{3}+4i\right)$$