

Analisi Matematica 1 - Lezione del 28 aprile 2014

$$\mathbb{C} = \{a+ib : a, b \in \mathbb{R} \quad i = \sqrt{-1}\}$$

Questo sistema numerico compare, in modo informale, nella risoluzione delle equazioni cubiche (vedi Gerolamo Cardano).

La formula risolutiva permette di determinare le soluzioni reali (una esiste sempre!), ma compaiono radici di numeri negativi, che $\notin \mathbb{R}$!

Dato $y^3 + by^2 + cy + d = 0$, con una Trasformazione $x = y + h$ e una scelta opportuna di h (esercizio) ci si riduce a considerare l'equazione

$$x^3 - 3px - 2q = 0$$

$x = u + v$ Idea di Cardano: ingrandire l'insieme delle soluzioni!!!

$$(u+v)^3 - 3p(u+v) - 2q = 0$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - 3p(u+v) - 2q = 0$$

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv - 3p) - 2q = 0$$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 - 2q = 0 \\ \textcircled{u \cdot v = p} \end{cases}$$

possiamo introdurre un vincolo su u e v , in quanto $x = u + v$

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 - 2q &= 0 \\ p^3 &= u^3 \cdot v^3 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\nearrow u^6 - 2qu^3 + p^3 = 0 \\ &\searrow v^6 - 2qv^3 + p^3 = 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

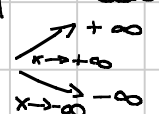
$$\Rightarrow u_{1,2} = q \pm \sqrt{q^2 - p^3} \quad v_{1,2} = q \pm \sqrt{q^2 - p^3}$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}}_{\{1, 2, 3\}} + \underbrace{\sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}}_{\{4, 5, 6\}}$$

le radici cubiche sono 3, quindi sembra

che le soluzioni siano 9: non è così, in quanto

se p.es. $X = \textcircled{1} + \textcircled{5}$ è soluzione, deve soddisfare
 $P = \textcircled{1} \cdot \textcircled{5}$

N.B. Una radice reale queste equazioni la possiede
sempre in quanto $f(x) = x^3 - 3px - 2q$ 

Esempio: $x^3 - 3x = 0$ ha tre soluzioni reali
 $x_1 = 0$ $x_2 = -\sqrt{3}$ $x_3 = \sqrt{3}$. In questo caso $p = 1$

$$x = \sqrt[3]{-\sqrt{-p^3}} + \sqrt[3]{\sqrt{-p^3}} = \sqrt[3]{-\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{\sqrt{-1}} \\ = \sqrt[3]{-i} + \sqrt[3]{i} \quad \text{e si ha } \sqrt[3]{-i} = \left\{ i, -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{i}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right\} \\ \sqrt[3]{i} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, -i \right\}$$

Come abbiamo già osservato, le soluzioni "sembrano"
9, ma sono 3 in quanto $p = 1 = u \cdot v$
e dunque

$$u_1 + v_1 = -i + i \quad \text{in quanto } -i \cdot i = 1$$

$$u_2 + v_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} \quad \text{in quanto } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 1$$

$$u_3 + v_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} \quad \text{" " } \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 1$$

$$z = a + ib \quad a = \operatorname{Re} z \equiv \text{parte reale di } z \in \mathbb{R}$$

$$b = \operatorname{Im} z \equiv \text{" immaginario di } z \in \mathbb{R}$$

$$\text{Oss } \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \quad \mathbb{R} \leftrightarrow \{a + ib : b = 0\}$$

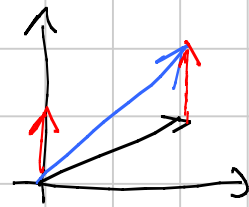
Posso introdurre + e .

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$

↑ somma tre vettori di $\mathbb{R}^2$

Infatti, $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$
 $a+ib \leftrightarrow (a,b)$

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$



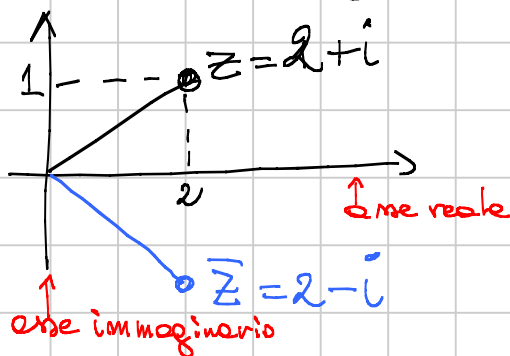
$$z \cdot w = (a+ib)(c+id) = ac - bd + i(ad+bc)$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & ac + iad + ibc + i^2 bd \\ & \parallel \\ & (ac - bd) + i(ad + bc) \end{aligned} \quad \leftarrow i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

Def (coniugato)

$z \in \mathbb{C}$ $z = a+ib$ diciamo "coniugato di z "
il numero $\bar{z} = a-ib$

Oss in $\mathbb{R}$ $\nexists$ coniugato, in quanto " $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ "



$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= \operatorname{Re} \bar{z} \\ \operatorname{Im} z &= -\operatorname{Im} \bar{z} \end{aligned}$$

Def (Modulo)

$z \in \mathbb{C}$ diciamo "modulo di z " il numero REALE

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

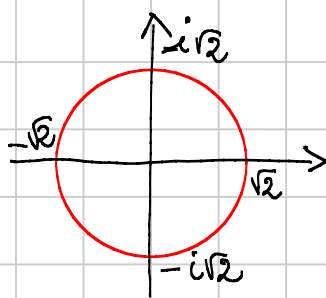
dove $a = \operatorname{Re} z$ $b = \operatorname{Im} z$

$$z = a + ib \quad \bar{z} = a - ib$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + iab - iab - i^2 b^2 = a^2 + b^2$$

Oss: $z = a \in \mathbb{R}$ allora $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$
modulo in $\mathbb{C}$ modulo in $\mathbb{R}$

Oss: la somma e il prodotto introdotti in $\mathbb{C}$ sono una estensione delle somme e prodotti introdotti in $\mathbb{R}$



Esempio $\{z: |z| = \sqrt{2}\}$

è una circonferenza in $\mathbb{C}$

Problema $\frac{1}{1-3i} \in \mathbb{C}$? Sì, ma non è in "forma algebrica"

Per portarlo in forma algebrica si deve operare come segue

$$\frac{1}{1-3i} \cdot \frac{1+3i}{1+3i} = \frac{1+3i}{1^2 + 3^2} = \frac{1}{10} + i \frac{3}{10}$$

$$\text{ovvero } \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-3i}\right) = \frac{1}{10} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-3i}\right) = \frac{3}{10}$$

Esercizio: Risolvere l'equazione $3z + i = \bar{z} - 1$
dim

Ponendo $z = a + ib$, l'equazione in $\mathbb{C}$ diventa un sistema di 2 equazioni in $\mathbb{R}$

$$3(a + ib) + i = a - ib - 1$$

$$2a + 1 + i(4b + 1) = 0$$

$$\begin{cases} 2a+1=0 \\ 4b+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{1}{2} - \frac{i}{4} \quad \square$$

Esercizio: Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

dim

$$1^o \text{ modo } z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$$

$$2^o \text{ modo } z = a+ib \Rightarrow (a+ib)^2 - 2(a+ib) + 2 = 0 \\ \Rightarrow (a^2 - b^2 - 2a + 2) + i(2ab - 2b) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 - 2a + 2 = 0 \\ b(a-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{a^2 - 2a + 2 = 0} \\ \cancel{b = 0} \end{cases} \vee \begin{cases} 1 - b^2 = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

$\Delta = 1 - 2 < 0$
non ha soluzioni in $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow z_1 = 1+i \quad \vee \quad z_2 = 1-i \quad \square$$

Oss: questa equazione ha due soluzioni complesse e coniugate: questo perché i coefficienti dell'equazione sono Reali

$$\text{Teorema: } P_m(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

$$\text{con } a_i \in \mathbb{R} \quad i=0, \dots, m$$

$$\text{Se } P(z) = 0 \quad \text{allora } P(\bar{z}) = 0$$

Esercizio: Risolvere l'equazione $z^2 - 2iz - 5 = 0$

dim

$$z = a+ib \quad (a+ib)^2 - 2i(a+ib) - 5 = 0 \Rightarrow a^2 - b^2 + 2iab - 2ia + 2b - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2b - 5 = 0 \\ a(b-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{b^2 - 2b + 5 = 0} \\ \cancel{a = 0} \end{cases} \vee \begin{cases} a^2 - 4 = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

non ha soluzioni in $\mathbb{R}$
poiché $\Delta = 1 - 5 < 0$

$$\Rightarrow z_1 = 2+i \quad z_2 = -2+i$$

$$\text{Altrimenti } z_{1,2} = i \pm \sqrt{-1+5} = i \pm 2 \quad \square$$

Relazioni di ordine

Su $\mathbb{R}$ è definita una relazione di ordine totale compatibile con le operazioni $+$ e $\cdot$ ovvero

$$i) a \leq b \quad c \in \mathbb{R} \Rightarrow a+c \leq b+c$$

$$ii) a \leq b \quad c \geq 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$$

Su $\mathbb{C}$ si possono introdurre ∞ relazioni di ordine totale, per esempio l'ordine lexicografico ovvero

$$z = a+ib \leq c+id = w \quad \text{se} \quad a < c$$

oppure

$$a = c \text{ e } b \leq d$$

Ma questo è un ordine totale su $\mathbb{C}$ che non è compatibile con il prodotto: infatti

$$i < 2i$$

$$0 < i$$

ma

$$i \cdot i = -1 < 2i \cdot i = -2$$

falso, in quanto $-1 > -2$!

PROPRIETÀ DEL CONIUGATO

$$1) |\bar{z}| = |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$2) \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

$$3) \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

$$4) \overline{(\bar{z})} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$3) \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \quad "$$

$$4) \overline{(\bar{z})} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Da verificare e
cosa ponendo
 $z = a+ib$
 $w = c+id$

PROPRIETÀ DEL MODULO

$$1) |z| = |\bar{z}| = |-z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$2) |z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

$$3) |z+w| \leq |z| + |w| \quad \text{Disuguaglianza Triangolare}$$

$$|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w \leq z\bar{z} + w\bar{w} + 2|z||w|$$

$$\text{ dunque basta provare } z\bar{w} + \bar{z}w \leq 2\sqrt{z\bar{z}}\sqrt{w\bar{w}}$$

$$" \quad " \quad " \quad \text{Re}(z \cdot \bar{w}) \leq |z| \cdot |w| = \sqrt{z\bar{z}} \sqrt{w\bar{w}}$$

$$\text{ posto } z = a+ib \quad w = c+id \quad z \cdot \bar{w} = ac - iad + ibc + bd$$

$$\text{ dunque basta provare } ac + bd \leq (a^2 + b^2)^{1/2} (c^2 + d^2)^{1/2}$$

dunque basta provare $\cancel{a^2c^2 + b^2d^2} + 2abcd \leq \cancel{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}$
 che equivale a $0 \leq (ad - bc)^2$, che è vero

$$4) \max \left\{ \underset{(a)}{|\operatorname{Re} z|}, \underset{(b)}{|\operatorname{Im} z|} \right\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

(a) segue da $|z| = \sqrt{|\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2} \geq \begin{cases} |\operatorname{Re} z| \\ |\operatorname{Im} z| \end{cases}$

(b) segue dalla 3) $|z| = |\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z| \underset{1.3)}{\leq} |\operatorname{Re} z| + |i \operatorname{Im} z| = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

Teorema (fondamentale dell'Algebra) no dim

Dato $P_n(z) = Q_n z^n + Q_{n-1} z^{n-1} + \dots + Q_1 z + Q_0$ $Q_i \in \mathbb{C} \ i=0 \dots n$

L'equazione $P_n(z) = 0$ ammette almeno una soluzione in $\mathbb{C}$

Corollario

$P_n(z) = 0$ ammette n soluzioni in $\mathbb{C}$

(contate con la dovuta molteplicità)

Esempio $(z - i)^{100} = 0$ possiede
 una soluzione $z = i$ avente
 molteplicità 100.

N.B. Il Teorema fondamentale dell'Algebra non vale in $\mathbb{R}$

$x^{15} - 1 = 0$ ha 1 soluzione in $\mathbb{R}$

$x^{30} + 1 = 0$ ha $\emptyset$ " in $\mathbb{R}$

$x^{40} - 1 = 0$ ha 2 " in $\mathbb{R}$

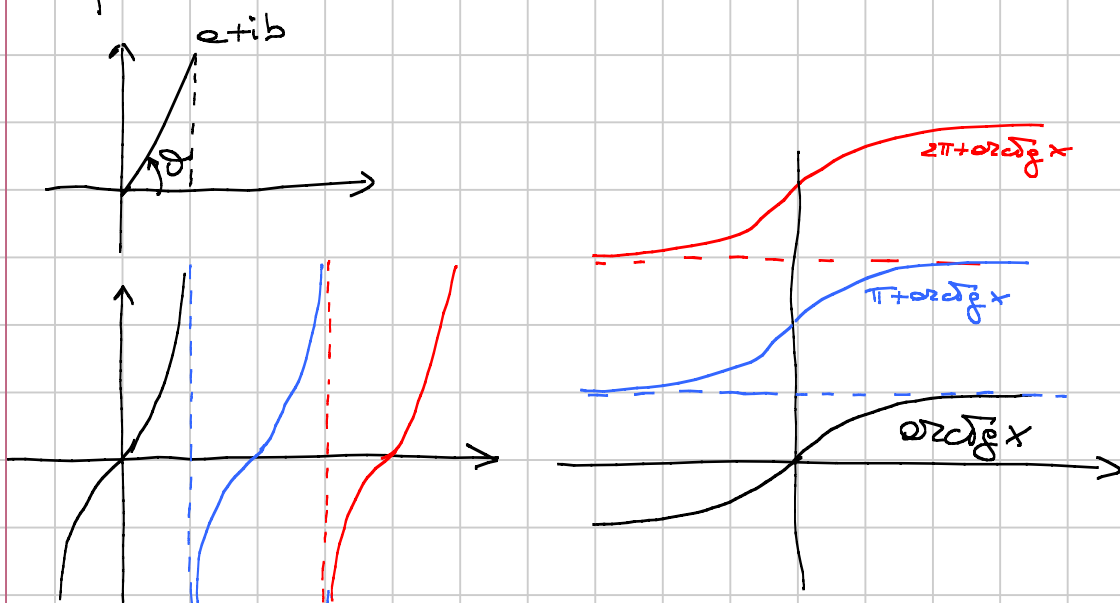
FORMA POLARE

$$z = a + ib \neq 0$$

$$\begin{cases} z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) \\ |z| = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \\ \theta = \arg_{\min} z \end{cases}$$

$$\text{ovv. } \theta = \arg_{\min} z = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a}, & \text{se } a > 0 \quad b > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } a = 0 \quad b > 0 \\ \pi + \arctan \frac{b}{a}, & \text{se } a < 0 \\ \frac{3}{2}\pi, & \text{se } a = 0 \quad b < 0 \\ 2\pi + \arctan \frac{b}{a}, & \text{se } a > 0 \quad b \leq 0 \end{cases}$$

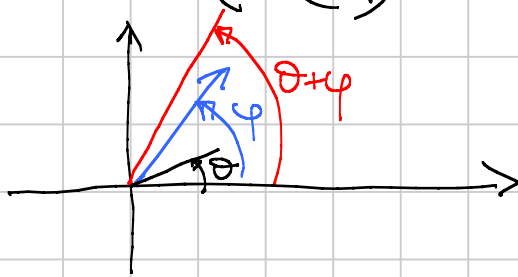
θ = il più piccolo angolo, contato positivamente in senso antiorario, formato dal vettore $(z-0)$ con il semiasse reale positivo



INTERPRETAZIONE DEL PRODOTTO

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) \quad w = |w| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z| \cdot |w| \cdot (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi + i (\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi)) \\ &= |z| |w| \cdot (\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)) \end{aligned}$$



FORMULA DI DE MOIVRE

Teorema

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad z = |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

dim

per induzione $z^2 = |z|^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$

si suppone $z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$

proviamo $z^{n+1} = |z|^{n+1} (\cos (n+1)\theta + i \sin (n+1)\theta)$

$$z^{n+1} = z \cdot z^n = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

↑
Hip. Induttiva

$$= \dots = |z|^{n+1} (\cos (n+1)\theta + i \sin (n+1)\theta)$$

facendo il prodotto e utilizzando

le formule di addizione per seno e coseno



Esercizio: Calcolare $(1+i\sqrt{3})^{45}$

dim

$$z = (1+i\sqrt{3}) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{ovvero } \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$$

$$|z| = 2$$

$$z^{45} = 2^{45} \left(\cos \frac{45\pi}{3} + i \sin \frac{45\pi}{3} \right)$$

$$= 2^{45} (\cos \pi + i \sin \pi) = -2^{45}$$



Esercizio: provare che

$$\begin{cases} \cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \\ \sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \end{cases}$$

dim.

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

||

$$\cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta$$



$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$$



RADICI n-ESIME in $\mathbb{C}$

Il Teorema fondamentale dell'algebra garantisce che $z^n - w = 0$

possiede n radici in $\mathbb{C}$ - contate con la dovuta molteplicità.

Però non sappiamo come calcolarle: il Teorema fondamentale dell'Algebra garantisce l'esistenza non fornisce strumenti di calcolo

Oss: in $\mathbb{R}$ l'equazione

$x^{30} = 1$ ha 2 soluzioni reali

$x^{31} = 1$ ha 1 " reale

$x^{31} = -1$ " 1 " reale

$x^{32} = -1$ " $\emptyset$ " reali

Def Dato $w \in \mathbb{C}$, il numero complesso z si dice "radice n -esima di w " se $z^n = w$

Teorema (Radici n -esime di $w \in \mathbb{C}$)

Sia dato $w = |w| \cdot (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \in \mathbb{C}$

Allora $\forall n \geq 1$ esistono n radici distinte di w date da

$$z_k = |w|^{\frac{1}{n}} \left(\cos \left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n} k \right) + i \sin \left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n} k \right) \right) \quad k=0,1,\dots,n-1$$

Preso $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, se $z^n = w$ allora

$$(*) \quad |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = |w| (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

e paragonando i moduli si trova

$$|z|^n = |w| \Rightarrow |z| = |w|^{\frac{1}{n}}$$

e dunque (*) equivale a

$$\begin{cases} |z| = |w|^{\frac{1}{n}} \\ \cos n\varphi = \cos \theta \\ \text{sen } n\varphi = \text{sen } \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = |w|^{\frac{1}{n}} \\ n\varphi = \theta + s \cdot 2\pi \quad s \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z| = |w|^{\frac{1}{n}} \\ \varphi = \frac{\theta}{n} + s \cdot \frac{2\pi}{n} \end{cases} \quad s \in \mathbb{Z}$$

dato $s \in \mathbb{Z} \exists h \in \mathbb{Z} \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ T.c.

$$s = h \cdot n + k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z| = |w|^{\frac{1}{n}} \\ \varphi = \frac{\theta}{n} + 2\pi \cdot h + k \cdot \frac{2\pi}{n} \end{cases} \quad h \in \mathbb{Z} \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$\Rightarrow$ restano individuati n radici $\neq$ in corrispondenza

$$\text{e } \begin{cases} |z| = |w|^{\frac{1}{n}} \\ \varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k \end{cases} \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad \square$$

Esercizio: Calcolare le radici cubiche di $w = -1$

dim

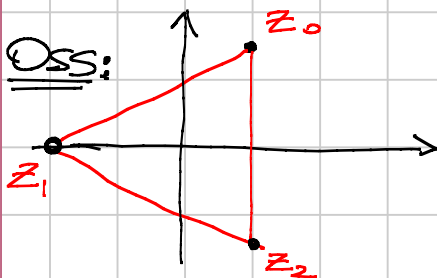
$$w = -1 = |w| \cdot (\cos \pi + i \text{sen } \pi) = \cos \pi + i \text{sen } \pi \quad (|w| = 1)$$

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot k\right) + i \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot k\right) \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \text{sen} \frac{\pi}{3} \\ = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = \cos \pi + i \text{sen} \pi \\ = -1$$

$$z_2 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \text{sen} \frac{5\pi}{3} \\ = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \square$$



le tre radici si trovano tutte sulla circonferenza

$$|z| = 1$$

ed inoltre

$$d(z_0, z_1) = |z_1 - z_0| = \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| = \left(\left(-\frac{3}{2} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$d(z_2, z_0) = |z_0 - z_2| = \left((-\sqrt{3})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

ovvero le tre radici si dispongono ai vertici di un Triangolo equilatero.

Analogamente si dimostra che le radici n -esime di $w=1$ si dispongono sulla circonferenza di centro 0 e raggio 1 ai vertici di un n -gono regolare, e uno dei vertici cade in $z_0=1$.