Analisi Matematica 1 - Lezione del 14 aprile 2014

Def $f: A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A $\quad f = o(1)$ per $x \to x_0$

Se $\exists \alpha > 0$ $\exists a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $f(x) = a \cdot |x - x_0|^\alpha + o(|x-x_0|^\alpha)$ $\quad x \to x_0$

allora $\alpha \equiv$ ordine dell'infinitesimo $f(x)$ per $x \to x_0$

$a \cdot |x - x_0|^\alpha \equiv$ parte principale dell'infinitesimo

Esempio $\quad f(x) = \sin x - x \quad x \to 0$

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad x \to 0$$

$\alpha = 3 \equiv$ ordine infinitesimo

$-\frac{x^3}{6} \equiv$ p.p. dell'infinitesimo

Oss $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \boxed{x^\alpha = e^{\alpha \log x}}$ e dunque $x > 0$!

Def $f, g \to \infty$ $x \to x_0$ $\quad (f, g \to 0 \quad x \to x_0)$

diciamo che "$f \sim g$ per $x \to x_0$"

(f asintoticamente equivalente a g per $x \to x_0$)

se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Esercizio

Data $f(x) = 3e^{x^2} - 2\log(1+x^2) - \frac{x}{1-2x} - 3\cos x + \sin x$

- calcolare $P_4(x)$ polinomio di Taylor centrato in $x=0$
- Determinare ordine e parte principale

$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \qquad \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \qquad (1-y)^{-1} = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + o(y^4)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$$f(x) = 3e^{x^2} - 2\log(1+x^2) - \frac{x}{1-2x} - 3\cos x + \sin x$$

$$f(x) = 3\left(\cancel{1} + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) - 2\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)$$

$$-x\left(\cancel{1} + 2x + 4x^2 + 8x^3 + o(x^3)\right) - 3\left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) + \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$= x^2\left(3 - 2 - 2 + \frac{3}{2}\right) + x^3\left(-4 - \frac{1}{6}\right) + x^4\left(\frac{3}{2} + 1 - 8 - \frac{1}{8}\right) + o(x^4)$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{25}{6}x^3 - \frac{45}{8}x^4 + o(x^4)$$

ordine $(f) = 2$

p.p. $(f) = \frac{x^2}{2}$ $\qquad \boxed{x \to 0}$

Oss

$P_1(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow f(x) = o(x)$

Oss lo sviluppo di $f(x) = \cos x$ in un intorno di $x = \frac{\pi}{2}$ di ordine 3

1° modo $\displaystyle P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(\frac{\pi}{2})}{k!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^k$

$f(x) = \cos x = P_3(x) + o\left(\left|x - \frac{\pi}{2}\right|^3\right) \quad x \to \frac{\pi}{2}$

2° modo $\cos x = \cos\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) =$

$$= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$$

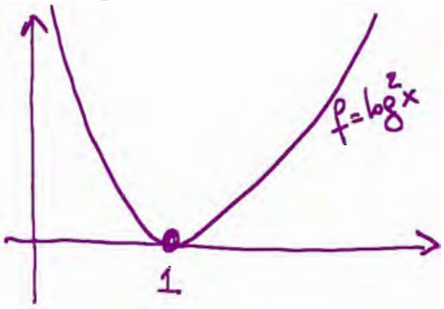
$$= -\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad x \to \frac{\pi}{2}$$

$$= -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right) \quad x \to \frac{\pi}{2}$$

Esercizio Calcolare - se esiste - $\int_0^1 \log^2 x\, dx$

dim

$f = \log^2 x \geq 0 \quad \forall x \in]0,1] \Rightarrow$ l'integrale esiste (finito o $+\infty$)



$$f' = 2\frac{\log x}{x} \begin{cases} >0 & x>1 \\ <0 & x<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Per il corollario del Teorema Weierstrass $x=1$ pto minimo assoluto

Calcolo primitive

$$\int \log^2 x\, dx = \int \underset{u'}{\log x} \cdot \underset{v}{\log x}\, dx = \underset{u}{(x\log x - x)}\, \underset{v}{\log x} - \int \underset{u}{(x\log x - x)} \cdot \underset{v'}{\frac{1}{x}}\, dx$$

$$= x\log^2 x - x\log x - \int \log x\, dx + \int dx$$

$$= x\log^2 x - x\log x - (x\log x - x) + x + c$$

$$= x\log^2 x - 2x\log x + 2x + c$$

$$\int_y^1 \log^2 x\, dx = \left[x\log^2 x - 2x\log x + 2x\right]_{x=y}^{x=1} = 2 - y\log^2 y + 2y\log y - 2y$$

$$\lim_{y\to 0} \int_y^1 \log^2 x\, dx = 2 - \lim_{y\to 0}\underbrace{\left(y\log^2 y\right)}_{=0^+} + 2\lim_{y\to 0}\underbrace{\left(y\log y\right)}_{=0^-} - 0$$

$$= 2$$

$\lim_{y\to 0^+} y\log y = 0^-$ ← limite fondamentale

$$\lim_{y\to 0^+} y\log^2 y \underset{z=\log y}{=} \lim_{z\to-\infty} e^z \cdot z^2 \underset{t=-z}{=} \lim_{t\to+\infty} e^{-t} t^2 = 0$$

Esercizio Per quali α converge $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^\alpha}$

dim

Io so che $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$

" " " $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge a $+\infty$

$$\int_2^y \frac{dx}{x(\log x)^\alpha} = \int_2^y \frac{d(\log x)}{(\log x)^\alpha} = \left[\frac{(\log x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{x=2}^{x=y}$$

$$= \frac{(\log y)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(\log 2)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \xrightarrow[y\to+\infty]{} \frac{(\log 2)^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

se $\alpha > 1$

dunque

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\log x}$ diverge, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\log^2 x}$ converge

$\boxed{//}$

Oss: in modo analogo $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\log x\,[\log(\log x)]^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$

come pure

$\displaystyle\int_{e^{e^2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\log x\,\log(\log x)\,[\log(\log(\log x))]^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$

Pb $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\,[\log(\log x)]^2}$ converge ? NO!

infatti, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{[\log(\log x)]^2} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\log x}}{\frac{1}{x[\log(\log x)]^2}} = 0^+$

Tle $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log x} = +\infty \Rightarrow \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x[\log(\log x)]^2} = +\infty$ $\blacksquare$

Oppure

$$\int_{e^2}^{z} \frac{dx}{x\,[\log(\log x)]^2} \overset{\log x = y}{=} \int_2^{\log z} \frac{e^y\,dy}{e^y\,[\log y]^2} = \int_2^{\log z} \frac{dy}{[\log y]^2} \overset{\log y = t}{=}$$

$$= \int_{\log 2}^{\log(\log z)} \frac{e^t\,dt}{t^2} \xrightarrow[z \to +\infty]{} +\infty$$

in quanto $e^t = \left(e^{t/2}\right)^2 \geq \left(1+\frac{t}{2}\right)^2 \geq \frac{t^2}{4}$

e dunque $\int_{\log 2}^{\log(\log z)} \frac{e^t}{t^2}\,dt \geq \int_{\log 2}^{\log(\log z)} \frac{1}{4}\,dt \xrightarrow[z\to+\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dy}{y(\log\log y)^2} = +\infty$ $\blacksquare$

Teorema (Confronto Serie Integrale improprio)

$f: [a,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ decrescente $\quad a \geq 0$

Allora sono equivalenti

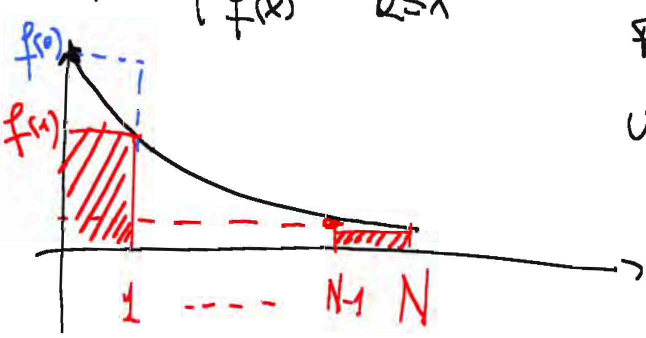
i) $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge (diverge a $+\infty$)

ii) $\sum_n f(n)$ converge (diverge a $+\infty$)

dim

Non è restrittivo prendere $a = 0$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(a) & 0 \leq x < a \\ f(x) & a \leq x \end{cases}$$



Fissato $N \in \mathbb{N}$ $N > 0$

$\mathcal{A} = \{0 < 1 < 2 < \cdots < N-1 < N\}$

$\inf f[x_k, x_{k+1}] = \inf f([k, k+1]) = f(k+1)$

$$\sup f([x_k, x_{k+1}]) = \sup f([k, k+1]) = f(k)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{(x_{k+1}-x_k)}_{=1} f(k+1) = s(f, A) \le \underbrace{\int_0^N f(t)\,dt}_{\text{esiste poiché } f \text{ decrescente}} \le S(f, A) = \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{(x_{k+1}-x_k)}_{1} \cdot f(k)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(k+1) \underset{(1)}{\le} \int_0^N f(t)\,dt \underset{(2)}{\le} \sum_{k=0}^{N-1} f(k)$$

$\sum_n f(n)$ converge $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge per la (2)

$\sum_n f(n)$ diverge $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge per la (1)

$\Downarrow$ $\sum_n f(n+1)$ diverge $\Uparrow$

$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge $\Rightarrow \sum_n f(n)$ converge (1)

$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge $\Rightarrow \sum_n f(n)$ diverge (2) $\blacksquare$

Esercizio $\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$ converge se $\alpha > 1$
diverge se $\alpha \le 1$

dim

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$
diverge a $+\infty$ se $\alpha \le 1$

$\Longleftrightarrow$ $\sum_{n \ge 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$, diverge se $\alpha \le 1$

$\Uparrow$

Teorema Confronto serie integrale

Esercizio Calcolare l'equazione della retta tangente in $\left(\frac{\pi}{3}, F\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

dove $$F(x) = \int_{1/2}^{\cos x} \frac{e^t}{t}\,dt$$

<u>dire</u>

Devo scrivere $y - F(\pi/3) = F'(\pi/3)\,(x - \pi/3)$

$$F(\pi/3) = \int_{1/2}^{\cos \pi/3} \frac{e^t}{t}\,dt = \int_{1/2}^{1/2} \frac{e^t}{t}\,dt = 0$$

$$x \xrightarrow{g} \cos x \xrightarrow{h} \int_{1/2}^{\cos x} \frac{e^t}{t}\,dt$$

$$F(x) = h(g(x))$$

$$F'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= \frac{e^{g(x)}}{g(x)} \cdot g'(x) =$$

$$= \frac{e^{\cos x}}{\cos x} \cdot (-\operatorname{sen} x)$$

$$F'(\pi/3) = \frac{\sqrt{e}}{1/2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3e}$$

$$y = -\sqrt{3e} \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Def (Asintoto Obliquo)

$f : [\alpha, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ La retta $y = ax + b$ è un "asintoto obliquo" per f quando $x \to +\infty$ se $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax - b] = 0$

Osserviamo che

Se $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax - b] = 0$ allora $\lim_{x \to +\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = 0$

allora $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a\right] = 0$

allora $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

Se $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax-b]=0$ allora $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$

Inoltre queste condizioni sono pure sufficienti e dunque

Teorema

$f:[\alpha,+\infty[\to\mathbb{R}$ sono tra loro equivalenti

(i) $\exists\ y=ax+b$ asintoto obliquo per f quando $x\to+\infty$

ovvero $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax-b]=0$

(ii) $\begin{cases}\exists \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}\\ \exists \lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b\in\mathbb{R}\end{cases}$

Oss: quando $a=0$ si parla di asintoto orizzontale

$\boxed{y=b}$ $\quad\lim_{x\to+\infty}f(x)=b$

Def (Asintoto Verticale)

Data una funzione $f:I\setminus\{\bar{x}\}\to\mathbb{R}$ dove I intervallo e $\bar{x}$ un punto (interno o di frontiera) di I, diciamo che $x=\bar{x}$ è un asintoto verticale se

$\lim_{x\to\bar{x}^-}f(x)=\infty$ o $\lim_{x\to\bar{x}^+}f(x)=\infty$

Esercizio Sia data $f(t)=\dfrac{1}{(1+t^2)(1+\operatorname{arctg}^2 t)}$

definiamo $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$.

Determinare dominio, segno, limiti agli estremi del dominio, monotonia, asintoti di F

dim

Si osserva che $f>0\ \forall t \Rightarrow \int_{-\infty}^{x}f(t)dt$ esiste finito o $+\infty$

f continua su $\mathbb{R} \Rightarrow f$ integrabile su $[a,b]\ \forall a,b\in\mathbb{R}$

Adesso $\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{-1}f(t)dt+\int_{-1}^{x}f(t)dt$ e si ha

$f(t)\sim\dfrac{1}{t^2\cdot(1+\frac{\pi^2}{4})}$ quando $t\to+\infty$ $\left(\text{infatti } \lim_{t\to+\infty}\dfrac{f(t)}{\frac{1}{t^2(1+\frac{\pi^2}{4})}}=1\right)$

Sapendo che $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^2(1+\frac{\pi^2}{4})} \in \mathbb{R}$, per il Criterio Confronto Asintotico
si ha $\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt \in \mathbb{R}$

Dunque $F(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{dominio}(F) = \mathbb{R}$
Inoltre
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} \frac{d(\operatorname{arctg} t)}{1+\operatorname{arctg}^2 t} dt = \lim_{x\to+\infty} \left[\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} t)\right]_{t=-\infty}^{t=x}$$
$$= \operatorname{arctg}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = 2 \operatorname{arctg} \tfrac{\pi}{2}$$

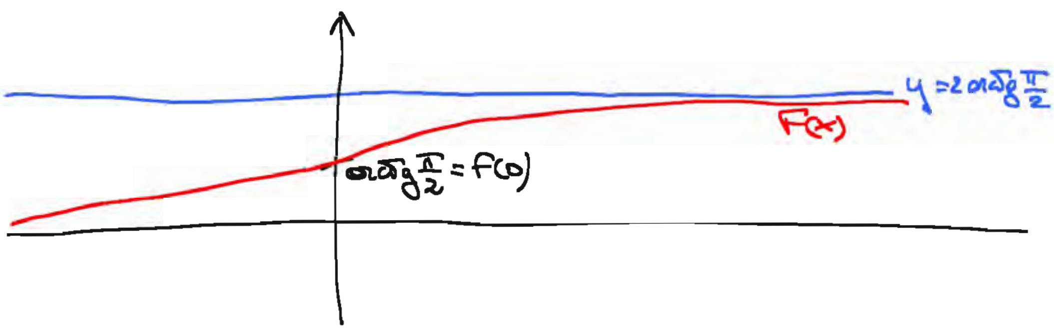
ovvero $y = 2 \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2}$ è un Asintoto Orizzontale
per $x \to +\infty$

MONOTONIA
$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+\operatorname{arctg}^2(x))} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
e quindi F crescente strettamente

Inoltre si osserva che $\frac{1}{f(x)} = \left(\text{funzione strettamente crescente}\right) \cdot \left(\text{funzione strettamente crescente}\right)$

e dunque $f(x)$ è strettamente decrescente
" " $F(x)$ è " CONCAVA

Un grafico approssimativo è il seguente



Esercizio Sia $f = x e^{\frac{1}{1+x}}$

Determinarne dominio, limiti agli estremi, segno, intervalli di monotonia, asintoti

dim

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

f continua $\forall x \neq -1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x \cdot \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{1+x}} = -\infty \cdot e^0 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{1+x}} = +\infty \cdot e^0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -1 \cdot \lim_{x\to-1^-} e^{\frac{1}{1+x}} = -e^{\lim_{x\to-1^-}\left(\frac{1}{1+x}\right)} = -e^{-\infty} = 0^-$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = -1 \lim_{x\to-1^+} e^{\frac{1}{1+x}} = -1 \cdot e^{\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{1}{1+x}\right)} = -e^{+\infty} = -\infty$$

Dunque $\boxed{x=-1 \text{ ASINTOTO VERTICALE}}$

SEGNO di $f(x)$

$$f(x) \begin{cases} >0 & \forall x>0 \\ =0 & x=0 \\ <0 & \forall x<0 \quad x\neq-1 \end{cases}$$

MONOTONIA

$$f'(x) = e^{\frac{1}{1+x}} + x e^{\frac{1}{1+x}} \cdot \left[-\frac{1}{(1+x)^2}\right] = e^{\frac{1}{1+x}} \cdot \frac{(1+x)^2 - x}{(1+x)^2} = e^{\frac{1}{1+x}} \frac{1+x+x^2}{(1+x)^2}$$

e quindi $f'(x) > 0 \ \forall x \neq -1 \Rightarrow f$ strettamente crescente

ASINTOTI OBLIQUI

Si ha che $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{1+x}} = 1 \ (=a)$

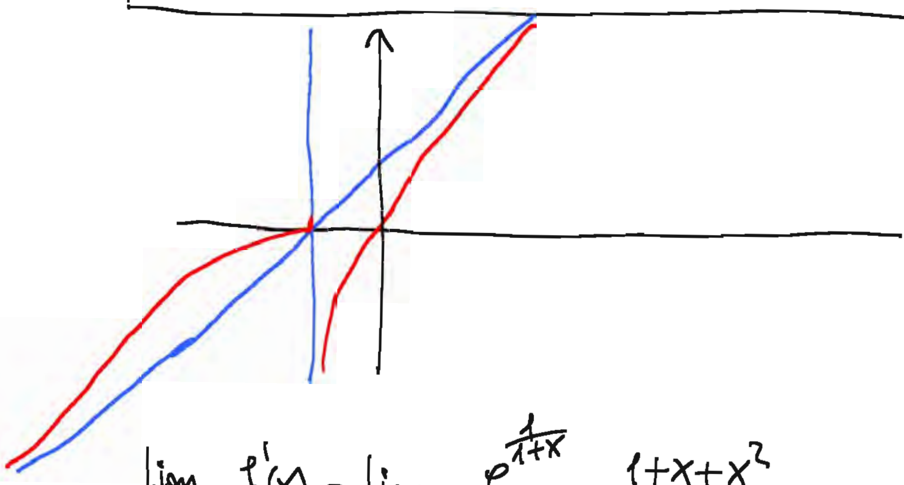
Inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x e^{\frac{1}{1+x}} - x\right) =$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x \left(1 + \frac{1}{1+x} + o\left(\frac{1}{1+x}\right) - 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x \left(\frac{1}{1+x} + o\left(\frac{1}{1+x}\right)\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1+x} = 1 \ (=b)$$

Dunque

$$\boxed{y = x+1 \quad \text{ASINTOTO OBLIQUO PER } x \to \pm\infty}$$



$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} e^{\frac{1}{1+x}} \cdot \frac{1+x+x^2}{(1+x)^2} =$$

$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{e^{\frac{1}{1+x}}}{(1+x)^2} = \lim_{x\to -1^-} e^{\frac{1}{1+x}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} \overset{y=1+x}{=} \lim_{y\to 0^-} e^{\frac{1}{y}} \cdot \frac{1}{y^2}$$

$$= \lim_{z\to +\infty} e^{-z} \cdot z^2 = \lim_{z\to +\infty} \frac{z^2}{e^z} = 0^+$$