INTEGRALI GENERALIZZATI:
esercizi proposti

1) Sia f : $[0,+\infty[\to$ R una funzione continua tale che f(0) = 0 e f(x) → - 1 per x → + ∞ . Allora:

(A) $\int_0^{+\infty} f = -\infty$; (B) $\int_0^{+\infty} f = -1$; (C) $\int_0^{+\infty} f = 0$; (D) non si può stabilire se f sia integrabile in senso generalizzato o no.

2) Studiare la convergenza dei seguenti integrali:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^6}dx$; b) $\int_0^1 \frac{t\cos t - \log(1+t)}{t^2}dt$; c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}}dx$; d) $\int_0^1 \frac{1}{\log x}dx$;

e) $\int_0^2 \frac{1}{e^x - e}dx$; f) $\int_0^1 \left(\frac{e^x}{senx} - \frac{1}{x}\right)dx$

NB Nell'esercizio 2) si vuole stabilita la convergenza o meno dell'integrale, non si vuole il calcolo esplicito del valore dell'integrale nel caso in cui converga

3) Calcolare, se esistono, i seguenti integrali:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^6}dx$; b) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^3}dx$; c) $\int_0^{\pi^2} \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos\sqrt{x}dx$; d) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx$;

e) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\,\frac{\cos x}{\mathrm{sen}^3 x}\,dx$; f) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 x \cdot (\mathrm{tg}^2 x + 2)}dx$;

NB Nell'esercizio 3) la convergenza è data per scontata, e si vuole il calcolo esplicito del valore dell'integrale.

4) Determinare α ∈ R tale che i seguenti integrali convergano:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{(\log x)^3}{\sqrt{x}\cdot(x+2)^\alpha}dx$; b) $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\log(1+x^4)}dx$; c) $\int_0^{+\infty} \frac{arctgx}{(x^2+1)^\alpha \cdot x^{3\alpha}}dx$; d) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x - e^2}\cdot(x-2)^\alpha}$;

e) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\log^\alpha(x+2)dx$; f) $\int_1^{+\infty} \frac{1+\log^2 x}{x^\alpha\cdot(1+5\log^2 x+6\log^4 x)}dx$; g) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\cdot(x^2+x^{-2})^{\alpha/2}}dx$

NB Nell'esercizio 4) si devono identificare i punti in cui studiare il comportamento asintotico della funzione integranda, e quindi ricavare le limitazioni eventuali su α in modo che l'integrale risulti convergente (in generale si cerca di confrontare, asintoticamente o con una disuguaglianza, f(t) con una opportuna funzione $t^{q(\alpha)}$ e quindi ricavare delle limitazioni su $q(\alpha)$)

6) Posto $I_n = \int_{1/(4n)}^{1/n} \frac{\cos x}{2\sqrt{x}}dx$, calcolare $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Stabilire inoltre per quali valori di α ∈R converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(n^\alpha I_n)$.

7) Dopo aver trovato tutte le primitive della funzione f(x) = $x\cdot 2^{-x^2}$, posto $a_n = \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{2n}} x\cdot 2^{-x^2}dx$,

calcolare la somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

8) Calcolare, se esiste (motivando la risposta), l'integrale $\int_{-2}^{1}(x^2 - 2x + 2\log|1+x|)dx$

NB Nell'esercizio 8) si ricordi che $\int_0^1 \log(x)dx = [x\log(x) - x]_0^1 = -1$, e quindi questo integrale risulta convergente perche'…

9) Sia f(x) = $\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+x}$

a) determinare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; b) determinare per quali $\alpha \in R$ converge $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha}dx$.

10) Date le funzioni: a) $F(x) = \int_4^x \frac{e^t}{1+\sqrt{t(10-t)}}dt$, b) $F(x) = \int_2^x \frac{e^t}{1+\sqrt{t^2-t}}dt$, c) $F(x) = \int_1^x \frac{\cos(t)}{\sqrt[3]{t+1}}dt$
stabilire quale è l'insieme di definizione D_F di ciascuna di esse. Per le funzioni a) e b) specificare in quale sottoinsieme di D_F la funzione F è positiva e in quale è negativa.

11) Determinare il comportamento per $x \to +\infty$ delle seguenti funzioni:
a) $F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+2}}dt$; b) $F(x) = \int_0^x \frac{2t^2+\log(t+1)}{t^2+e^{-t}}dt$

12) Data la funzione $f(x) = \frac{3x^2+11}{x^3+4x+3}$ sia F(x) la sua funzione integrale, calcolata a partire da $x_0 = 1$. Dopo aver dimostrato che $F(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{\log(x^2+1)}$.

13) Studiare la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ dove $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{t}}, & t<0 \\ \frac{1}{\sqrt{t}}, & t>0 \end{cases}$.

14) Per ogni $x \in R$ sia $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{(1+t^2)(1+\arctan^2 t)}dt$
a) disegnare un grafico approssimativo di F, studiandone in particolare gli intervalli di monotonia e i limiti agli estremi del dominio.
b) determinare per quali valori di $k \in R$ l'equazione F(x) = k ha soluzione.

RISULTATI

1) (A) ; **2)** a) converge ; b)converge ; c) converge ; d) diverge; e) non esiste ; f) converge ; **3)** a) 0 ; b) 3/8 ; c) -4 ; d) 6 ; e) non converge ; f) $\sqrt{2\pi}$; **4)** a) $\alpha > 1/2$; b) $\alpha > 3$; c) $1/5 < \alpha < 2/3$; d) $\alpha < 1/2$; e) $\alpha < 0$; f) $\alpha \geq 1$; g) $\alpha > 0$; **6)** 0 ; $\alpha < -1/2$; **7)** $-\frac{2^{-x^2}}{2\log 2} + c$; $\frac{1}{3\log 2}$; **8)** non esiste ; **9)** a) 1 , b) $1 < \alpha < 3/2$; **10)** a) $D_F = [0 ; 10]$; F(x) > 0 per $4 < x \leq 10$, F(x) = 0 per x = 4, F(x) < 0 per $0 \leq x < 4$; b) $D_F = [1 ; +\infty)$, F(x) > 0 per x > 2 , F(x) = 0 per x = 2 , F(x) < 0 per $1 \leq x < 2$; c) $D_F = R$; **11)** a) F ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$; b) F ha per $x \to +\infty$ un asintoto obliquo di m = 2 ; **12)** 3/2 ; **14)** una soluzione se $0 < k < 2\arctan(\pi/2)$.