

TUTORATO

Titolo nota

27/03/2014

FUNZIONI IPERBOLICHE

Def. SENO IPERBOLICO: $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

COSENO IPERBOLICO: $\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

PROPRIETÀ: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

In fatti: $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = 1$

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^x - (-1) \cdot e^{-x}) = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

Studiamo $f(x) = \sinh x$.

Dominio: $\mathbb{R}$

Limiti: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Simmetrie: $\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x$

$\sinh x$ è dispari

Monotonia: $f'(x) = \cosh x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sinh x \nearrow \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $\sup_{\mathbb{R}} \sinh x = +\infty \quad ; \quad \inf_{\mathbb{R}} \sinh x = -\infty$

Convexità: $\sinh x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^{-x} \Leftrightarrow x \geq 0$

siccome $\sinh x$ è la derivata II di $\sinh x$,
 $\sinh x$ è convessa $\forall x > 0$ (concava $\forall x < 0$) e
 $x = 0$ è pto di flesso.

$$\sinh(0) = 0.$$

Studiamo $f(x) = \cosh x$.

Domínio: $\mathbb{R}$

Limiti: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = +\infty$

Simmetrie: $\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$ $\cosh x$ è pari

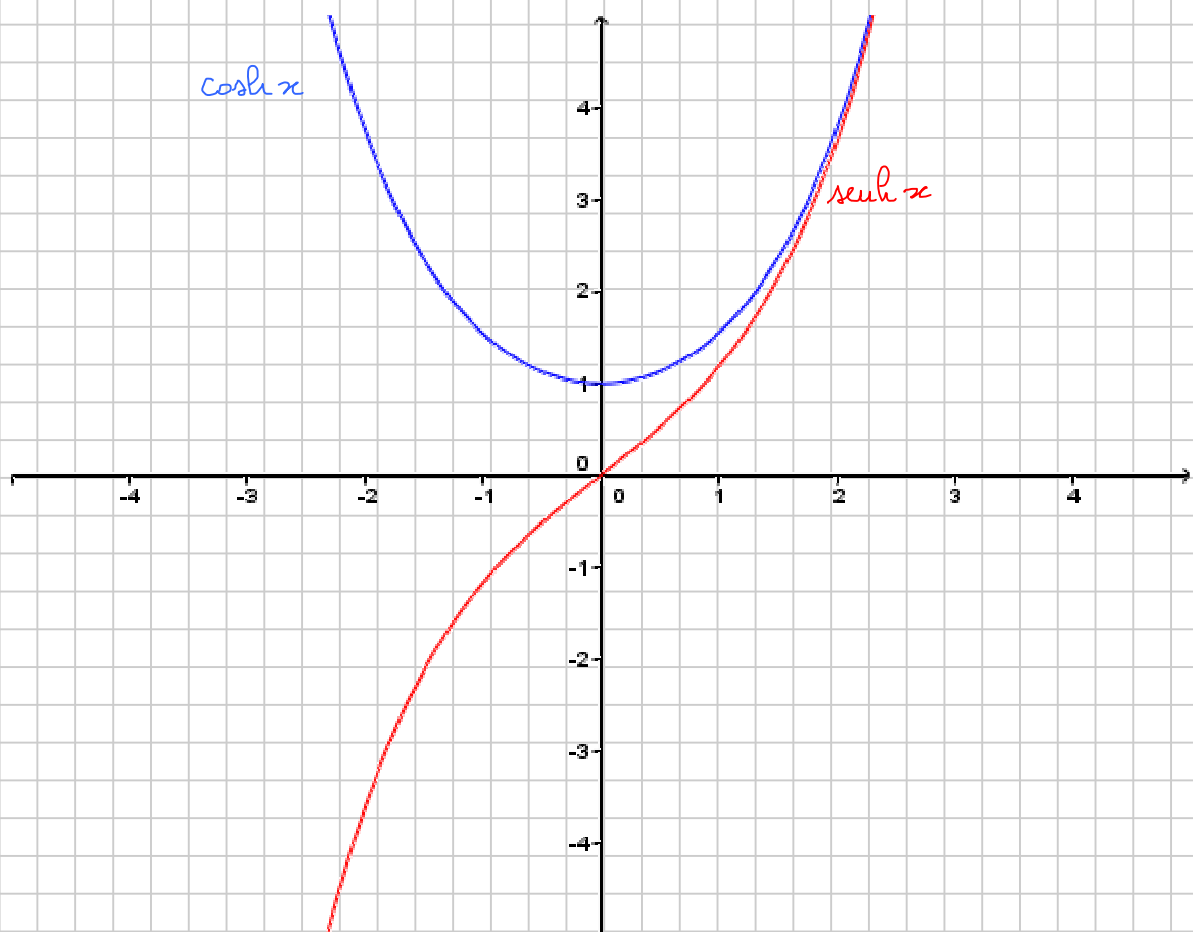
Monotonia: $f'(x) = \sinh x \geq 0 \iff x \geq 0 \Rightarrow \cosh x \nearrow \forall x > 0$,
 $\cosh x \searrow \forall x < 0$ e $x = 0$ è pto di minimo

$$\cosh(0) = 1 \text{ (minimo)}$$

$$\sup_{\mathbb{R}} \cosh x = +\infty$$

Converità: $f''(x) = \cosh x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh x$ è convessa $\forall x \in \mathbb{R}$

Grafico:



$\sinh x$ è invertibile e la sua inversa viene detta

SETTORE SENO IPERBOLICO $\operatorname{settsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

Infatti $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 2ye^x$

$$\Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

$\underbrace{y - \sqrt{y^2 + 1}}_{= -e^{-x}} < 0$ sempre, quindi non è accettabile come soluzione

$$\Leftrightarrow x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

ESERCIZIO

Calcolare $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

Sostituzione: $x = 2 \sinh(t)$

$$dx = 2 \cosh(t) dt$$

$$t = \operatorname{settsinh}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{4 \sinh^2 t + 4}} \cdot 2 \cosh t dt = \int \frac{2 \cosh t}{2 \sqrt{\sinh^2 t + 1}} dt =$$

$\uparrow$
 $\cosh^2 t = \sinh^2 t + 1$

$$= \int \frac{2 \cosh t}{2 \cosh t} dt = t + c = \underbrace{\operatorname{settsinh}\left(\frac{x}{2}\right)}_{\textcircled{1}} + c =$$

$$= \log\left(\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + 1}\right) + c = \log(x + \sqrt{x^2 + 4}) - \log 2 + c =$$

$$= \underbrace{\log(x + \sqrt{x^2 + 4})}_{\textcircled{2}} + k$$

① e ② sono entrambe primitive di $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ ma sono diverse!
Differiscono per la costante $\log 2$.

ESERCIZI: Derivare le funzioni:

$$1) \int_3^x \log(1+t^2) dt$$

$$2) \int_2^{\cos(x)} e^{t^2} dt$$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale ci dice che data $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua in I , allora fissato $a \in I$ $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$

$$1) F(x) = \int_3^x \log(1+t^2) dt \Rightarrow F'(x) = \log(1+x^2)$$

$$2) \text{ In questo caso abbiamo: } x \xrightarrow{\cos} \cos(x) \xrightarrow{F} \int_2^{\cos(x)} e^{t^2} dt$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi: } \frac{d}{dx} \left(\int_2^{\cos x} e^{t^2} dt \right) &= F'(\cos x) \frac{d}{dx} \cos x = \\ &= f(\cos x) \cdot (-\sin x) = -\sin x \cdot e^{\cos^2 x} \end{aligned}$$

ESERCIZIO: Studiare la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad \forall x \in [-10\pi, 10\pi] = I$$

• F è ben definita su I ? $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è definita

in $I \setminus \{0\}$, inoltre: $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin x}{x} = 1$, quindi

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{è continua}$$

dunque $\tilde{F}(x) = \int_0^x \tilde{f}(t) dt$ è ben definita, ma siccome

$$\int_0^x \tilde{f}(t) dt = \int_0^x f(t) dt, \quad \text{allora } F(x) \text{ è ben definita.}$$

• Simmetria: $F(-x) = \int_0^{-x} \frac{\sin t}{t} dt = - \int_0^x \frac{\sin y}{y} dy = -F(x)$

$\Rightarrow F$ è dispari su I

$$y = -t, \quad dy = -dt$$

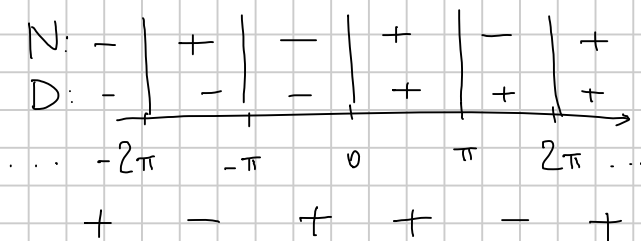
$$\frac{\sin(-t)}{-t} = \frac{\sin t}{t}$$

gli estremi cambiano in 0 e x

• Monotonia: $F'(x) = f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$f(x) \geq 0$ in I ? N: $\sin x \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$
con $k \in \mathbb{Z} \cap [-5, 5]$

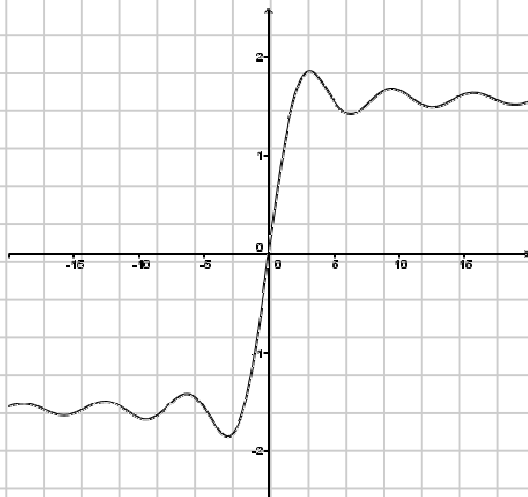
D: $x > 0$



Quindi $F(x) \uparrow \Leftrightarrow 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z} \cap [0, 5]$

- F ha massimo (locale) nei punti $\pi + 2k\pi$
e minimo (locale) nei punti $2k\pi$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} F \text{ ha massimo} \\ e \text{ minimo} \end{matrix}} \right\} k \in \mathbb{Z} \cap [0, 5]$

• Grafico:



ESERCIZIO: Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3e^{\sin(x^2)} - 3e^{\sin^2(x)} - x^\alpha}{x^2 - x \sin x}$$

Denominatore: $x^2 - x \sin x = \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{6} + o(x^5)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

Numeratore:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^8)$$

$$\left. \begin{matrix} e^{\sin(x^2)} \\ e^{\sin^2(x)} \end{matrix} \right\} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

mi basta sviluppare e^x fino all'ordine 2 per ottenere x^4 .

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{36} + o(x^8) - \frac{x^4}{3} + o(x^5) - o(x^7) = \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\sin^2 x} &= 1 + x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) + \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) \right)^2 \cdot \frac{1}{2} + o(x^4) \\ &= 1 + x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{2} + o(x^4) = \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3e^{\sin(x^2)} - 3e^{\sin^2 x} - x^\alpha &= \cancel{3} + \cancel{3x^2} + \frac{3}{2}x^4 + o(x^4) - \cancel{3} + \\ - \cancel{3x^2} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - x^\alpha &= x^4 - x^\alpha + o(x^4) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 - x^\alpha + o(x^4)}{\frac{x^4}{6} + o(x^4)} = \begin{cases} 6 & \text{se } \alpha > 4 \\ 0 & \text{se } \alpha = 4 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 4 \end{cases}$$