Analisi Matematica 1 - Lezione del 25 marzo 2014

Si è provato che

Teorema:

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata e monotona $\Rightarrow$ f è R-integrabile

Pb 1: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ convessa e limitata $\Rightarrow$ f è R-integrabile ???

Pb 2: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monotona e limitata su $[a,b]$ chiuso e limitato
$\Rightarrow$ f è continua ???

NO: si prenda $f(x) = \begin{cases} x & 0\le x<1 \\ x+2 & 1\le x\le 2 \end{cases}$ è monotona, limitata ma discontinua in $x=1$

Pb 3: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata e monotona strettamente
$\Rightarrow$ il numero delle discontinuità di f è finito???
(discontinuità in x_0 significa $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$)

APERTA PARENTESI: uniforme continuità

Def (uniforme continuità)

$f:A\to\mathbb{R}$ si dice "uniformemente continua su A" se

$$(*)\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall x,y\in A\quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Teorema: Se f unif. continua su A allora f continua $\forall x_0\in A$

dim: è sufficiente prendere $y=x_0$ in $(*)$ e si ha

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in A\quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Oss: Non vale il viceversa ovvero continuità $\not\Rightarrow$ unif. continuità

Ad esempio $f(x)=x^2$ non è unif. continua su $[0,+\infty[$

$f(x)=1/x$ " " " " $(0,1]$

lo proveremo in seguito

Teorema (Heine Cantor)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\forall x \in [a,b]$ chiuso e limitato

$\Rightarrow f$ è uniformemente continua su $[a,b]$

dim. (verrà fatto più avanti) diamo l'idea

xassurdo non è vera (*)

$$\text{non}\left[\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x,y \in A \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \varepsilon_0>0 : \forall \delta>0 : \exists x_\delta, y_\delta \in A \quad |x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ e } |f(x_\delta)-f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0$$

$$\Downarrow \delta = 1/n$$

$$\exists \varepsilon_0>0 \quad \forall n>0 : \exists x_n y_n \in A \quad |x_n - y_n| < 1/n \text{ e } |f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon_0$$

$\to \{x_n\}$ limitata $\Rightarrow \exists\, x_{k_n} \xrightarrow[n]{} \bar{x}$

$\to y_{k_n} \xrightarrow[n]{} \bar{x}$

$\Rightarrow |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \longrightarrow |f(\bar{x}) - f(\bar{x})| = 0$ ASSURDO ↯

Oss: Questo Teorema di Heine Cantor ha le stesse ipotesi del Teorema di Weierstrass e sfrutta quindi la continuità di f e la compattezza di $[a,b]$ (infatti viene impiegato il Teorema di Bolzano Weierstrass nella dimostrazione di entrambi i teoremi)

CHIUSA PARENTESI uniforme continuità

Teorema (Integrabilità delle funzioni continue)
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ chiuso e limitato
$\Rightarrow f$ è R-integrabile su $[a,b]$

dim

f continua su $[a,b]$ chiuso e limitato

$\Rightarrow$ (Heine Cantor) f è uniformemente continua su $[a,b]$ ovvero
$(*)$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall x,y\in A\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\Rightarrow$ (Weierstrass) f è limitata su $[a,b]$

$\Rightarrow$ (Weierstrass) $\forall[x_k,x_{k+1}]\subseteq[a,b]\ \exists x_{m_k}\ x_{M_k}$ t.c.

$$f(x_{m_k})=\min f([x_k,x_{k+1}]) \qquad f(x_{M_k})=\max f([x_k,x_{k+1}])$$

Vogliamo provare Tesi $\forall\varepsilon>0\ \exists\mathcal{C}_\varepsilon$ suddivisione : $S(f,\mathcal{C}_\varepsilon)-s(f,\mathcal{C}_\varepsilon)<\varepsilon$

Introduciamo – scelta cruciale – la suddivisione $\mathcal{C}_\varepsilon$:

$$\mathcal{C}_\varepsilon=\{a=x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b\} \quad \text{t.c.} \quad |x_{k+1}-x_k|<\delta$$

scelta cruciale

dove δ è data dalla uniforme continuità

Con questa scelta si ha $(x_k,x_{k+1}\in\mathcal{C}_\varepsilon\,!)$
$|x_{k+1}-x_k|<\delta$ e $x_{m_k},x_{M_k}\in[x_k,x_{k+1}] \Rightarrow |x_{m_k}-x_{M_k}|<\delta$

$$\Rightarrow |f(x_{m_k})-f(x_{M_k})|<\varepsilon$$

e dunque

$$S(f,\mathcal{C}_\varepsilon)-s(f,\mathcal{C}_\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot\left[\sup f([x_k,x_{k+1}])-\inf f([x_k,x_{k+1}])\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\left[f(x_{M_k})-f(x_{m_k})\right]$$

$$<\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot\varepsilon=\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=\varepsilon\cdot(b-a)$$

Ne segue che

$\forall \varepsilon>0 \; \exists \mathcal{C}_\varepsilon$ suddivisione : $S(f,\mathcal{C}_\varepsilon)-s(f,\mathcal{C}_\varepsilon)<\varepsilon(b-a)$

e questo prova l'integrabilità di f in quanto questa è una condizione necessaria e sufficiente di integrabilità ↯

Oss: in una suddivisione $\mathcal{A}=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ in generale si ha $|x_{k+1}-x_k| \neq |x_{j+1}-x_j|$ quando $k\neq j$!

Teorema (le funzioni integrabili sono uno spazio vettoriale)

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitate e R-integrabili

$\Rightarrow$ i) $\alpha f+\beta g:[a,b]\to\mathbb{R}$ è R-integrabile $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

ii) $\displaystyle\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx$

La dimostrazione è omessa (esercizio)

Teorema

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-integrabili

$\Rightarrow (f\cdot g)(x)$ è R-integrabile

dim (idea)

$$(f\cdot g)(x)=\frac{1}{4}\left[(f+g)^2(x)-(f-g)^2(x)\right]$$

- $f+g$ e $f-g$ sono R-integrabili per il Teorema precedente
- se ϕ è R-integrabile allora ϕ^2 è R-integrabile (va dimostrato)

a questo punto il Teorema è provato ↯

Oss: $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx \neq \int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_a^b g(x)\,dx$

Teorema (confronto)

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitate e R-integrabili

$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

La dimostrazione è omessa: si osservi che comunque si prenda $\mathcal{A}$ suddivisione si prova $s(f,\mathcal{A}) \leq s(g,\mathcal{A})$ $\quad S(f,\mathcal{A}) \leq S(g,\mathcal{A})$

Teorema

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e R-integrabile

$\Longrightarrow$ i) $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ è R-integrabile

ii) $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ è R-integrabile

iii) $|f|(x) = f^+(x) + f^-(x)$ è R-integrabile e si ha

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

La dim è omessa

Pb: Se $|f|(x)$ è R-integrabile allora f è R-integrabile?

NO: prese $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ si ha che

- f non è R-integrabile su $[0,1]$ in quanto

  $s(f,\mathcal{A}) = -1 < 1 = S(f,\mathcal{A}) \quad \forall \mathcal{A}$ suddivisione

  (si veda l'esempio fatto ieri con la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$)
- $|f|(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi è R-integrabile su qualsiasi intervallo limitato $[a,b]$ $\lightning$

Nota Bene

$$A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} \inf A \geq \inf B \\ \sup A \leq \sup B \end{cases}$$

infatti, supponendo $m_A, m_B, M_A, M_B \neq \emptyset$ (minoranti e maggioranti)

$$A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} m_A \supseteq m_B \\ M_A \supseteq M_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max m_A \geq \max B \\ \min M_A \leq \min M_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \inf A \geq \inf B \\ \sup A \leq \sup B \end{cases}$$

Questo succede poiché ad esempio

$$\min \mathcal{M}_A = \min \{\min \mathcal{M}_B , \min(\mathcal{M}_A \setminus \mathcal{M}_B)\} \leq \min \mathcal{M}_B \quad !$$

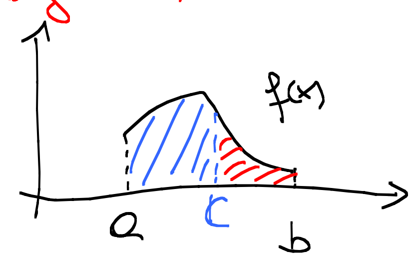
Teorema (di spezzamento - Chasles)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e R-integrabile, sia $c \in]a,b[$

$\Rightarrow$ i) f è R-integrabile su $[a,c]$ e su $[c,b]$

ii) $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$

La dimostrazione è omessa. Si veda la figura seguente



$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Teorema (della media integrale)

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

i) f R-integrabile $\Rightarrow$ $\inf f([a,b]) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup f([a,b])$

ii) f continua su $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\exists z \in [a,b] : f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$

dim

i) banalmente $\inf f([a,b]) \leq f(x) \leq \sup f([a,b]) \quad \forall x \in [a,b]$

inoltre $\inf f([a,b])$, $f(x)$ e $\sup f([a,b])$ sono R-integrabili su $[a,b]$

$\Rightarrow$ (Teorema Confronto) $\int_a^b \inf f([a,b])\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \sup f([a,b])\,dx$

$\Rightarrow (b-a) \inf f([a,b]) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a) \sup f([a,b])$

da cui segue la 1) dividendo i tre membri per $(b-a)$

ii) Siamo nelle ipotesi del Teorema di Weierstrass, e dunque esistono $x_m, x_M \in [a,b]$: $f(x_m) = \min f([a,b])$

$f(x_M) = \max f([a,b])$

e in particolare f è limitata

Per il Teorema sull'integrabilità delle funzioni continue si ha che f è R-integrabile su $[a,b]$

Dalla i) si ha quindi

$$f(x_m) = \min f([a,b]) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq \max f([a,b]) = f(x_M)$$

Per il teorema dei valori intermedi f assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo e dunque

$$\exists z \in [a,b] : f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

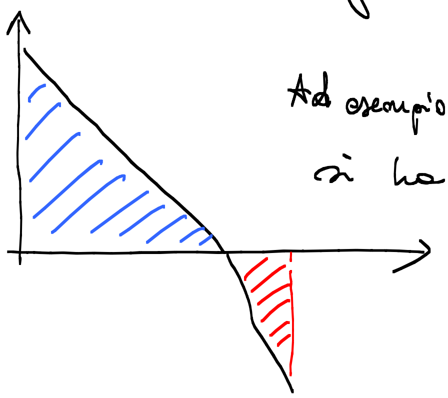
Oss: Da un punto di vista grafico, $f(z)$ è l'altezza (con segno!) di un rettangolo di base $(b-a)$ in modo che

$$f(z)\cdot(b-a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

NOTA BENE: $\int_a^b f(x)\,dx$, in generale, non è l'area del sottografico di f su $[a,b]$

lo sarà se $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

In generale $\int_a^b f(x)\,dx$ può essere anche negativo



Ad esempio, presa $f(x) = 3 - x$ su $[0,4]$ si ha che $\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{3\cdot 3}{2} - \frac{2\cdot 1}{2} = \frac{7}{2}$

Problema: Possiamo dare un significato a

$$\int_5^1 f(x)\,dx \quad \text{dove } f:[1,5]\to\mathbb{R} \text{ è R-integrabile?}$$

Sì: si parla di "integrale su intervallo orientato" e si definisce

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Questa definizione è ben posta. Tutti i teoremi continuano a valere per questo integrale, unica attenzione

$$f\le g \ \forall x\in[a,b] \implies \int_a^b f(x)\,dx \begin{cases} \le \int_a^b g(x)\,dx & a\le b \\ \ge \int_a^b g(x)\,dx & a>b \end{cases}$$

come pure va fatta attenzione con i moduli

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|$$

perché devo mettere questo modulo?

NB: Si pensi al lavoro di una forza

NB: questa definizione è intrinsecamente legata al concetto di integrale di una funzione su intervallo, ovvero su un insieme totalmente ordinato con ordine legato alle operazioni

Abbiamo poi il notevole vantaggio

$$\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^{100} f(x)\,dx + \int_{100}^5 f(x)\,dx$$

non appena f è R-integrabile su [1,100] !

Teorema (Fondamentale del Calcolo Integrale)

$f: I \to \mathbb{R}$ continua, I intervallo, sia $a \in I$ fissato

Poniamo $F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad x \in I$

$$\Rightarrow F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

dim

f continua su $I \Rightarrow f$ è R-integrabile su $\begin{cases} [a,x] & a \le x \\ [x,a] & x \le a \end{cases}$

$\Rightarrow F(x)$ è ben definita $\forall x \in I$

Fissato $x_0 \in I$ Tesi: $F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$

$$\frac{1}{x-x_0}\left(F(x) - F(x_0)\right) \underset{\text{definizione di } F}{=} \frac{1}{(x-x_0)}\left(\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right) =$$

$$\underset{\text{integrale su intervalli orientati}}{=} \frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)dt + \int_{x_0}^a f(t)dt\right) \underset{\text{Teorema di Chasles}}{=} \frac{1}{(x-x_0)} \int_{x_0}^x f(t)dt$$

$$\underset{\text{Teorema della media integrale}}{=} f(z) \quad \text{con } z \text{ compreso tra } x_0 \text{ e } x$$

Dunque, quando $x \to x_0$, necessariamente anche $z \to x_0$

e quindi

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \dots = \lim_{x \to x_0} f(z) = \lim_{z \to x_0} f(z) \underset{f \text{ continua in } x_0}{=} f(x_0)$$

NOTA BENE: $F(x)$ è Lipschitziana di costante $L = \sup f(I)$

NOTA BENE: $\int_0^x e^{t^2} dt = F(x)$ è una primitiva di e^{t^2}, ma non so scriverla in termini di funzioni elementari