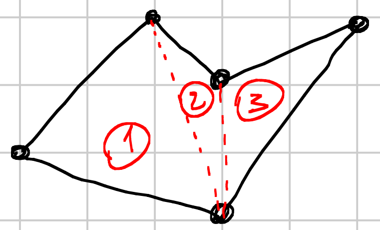
Analisi Matematica 1 - Lezione del 24 marzo 2014

Nelle lezioni precedenti abbiamo studiato l'antiderivazione, ovvero la

Ricerca delle Primitive

Un problema molto antico è quello dell'agrimensore, ovvero il problema di misurare "l'area" di un terreno



Attraverso la Triangolarizzazione si può sempre calcolare l'area di un qualsiasi appezzamento delimitato da segmenti di retta, ed è assai semplice calcolare l'area di un Triangolo con la formula di Erone $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$2p$ = perimetro

Per fare una Teoria dell'integrazione su misure si introduce su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una

misura esterna m_e

Poi si introduce una misura interna m_i e si dice che $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ è misurabile se

$$m_i(A) = m_e(A)$$

Nell'integrale di Riemann si introduce l'integrale e si definisce la misura

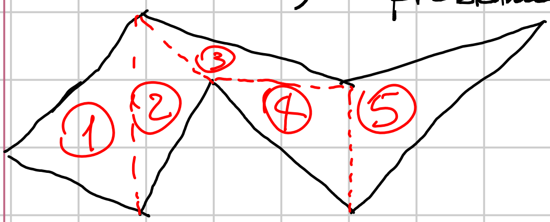
① L'area (la misura) di un rettangolo $\equiv$ base $\times$ altezza

② $A \subseteq B \implies$ misura $(A) \leq$ misura (B)

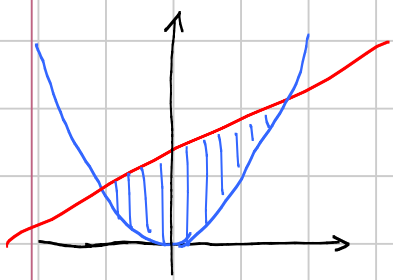
③ T è una rotoTraslazione $\implies$ misura $(T(A)) =$ misura (A)

INTEGRALE DEFINITO

Storicamente, il problema dell'agrimensore consisteva nel misurare una figura piana delimitata da segmenti di retta - un appezzamento di terreno - ovvero assegnare un numero a questa area. Per risolvere il problema

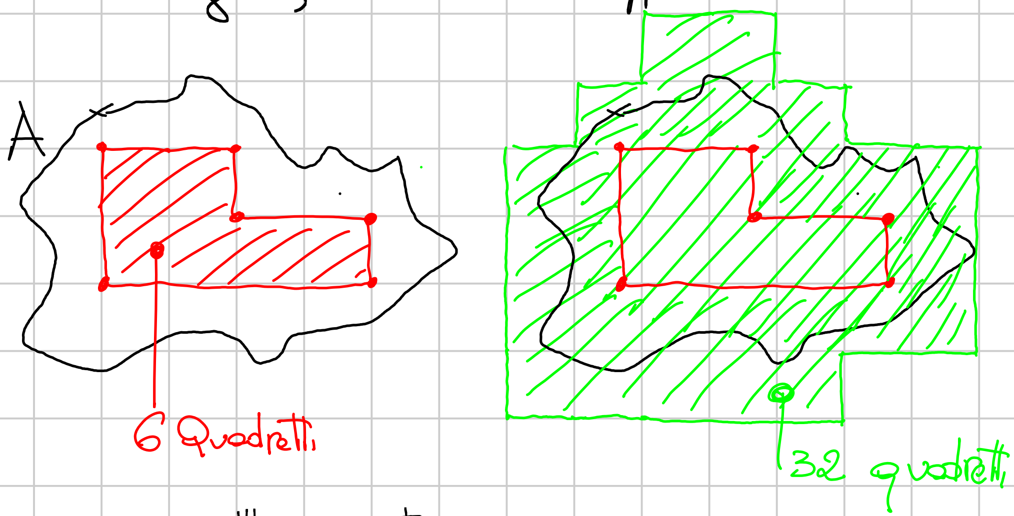


- si suddivide la figura in tanti triangoli
- si calcola (formula di Erone) l'area dei triangoli



Archimede (il genio per antonomasia) sapeva calcolare l'area del "segmento parabolico", cioè l'area tratteggiata in figura. Come pure sapeva calcolare l'area del cerchio di raggio R: possiamo far risalire a lui l'idea di approssimarne l'area (per eccesso e difetto) con l'area di opportuni poligoni regolari.

Data una regione, andiamo ad approssimarne l'area

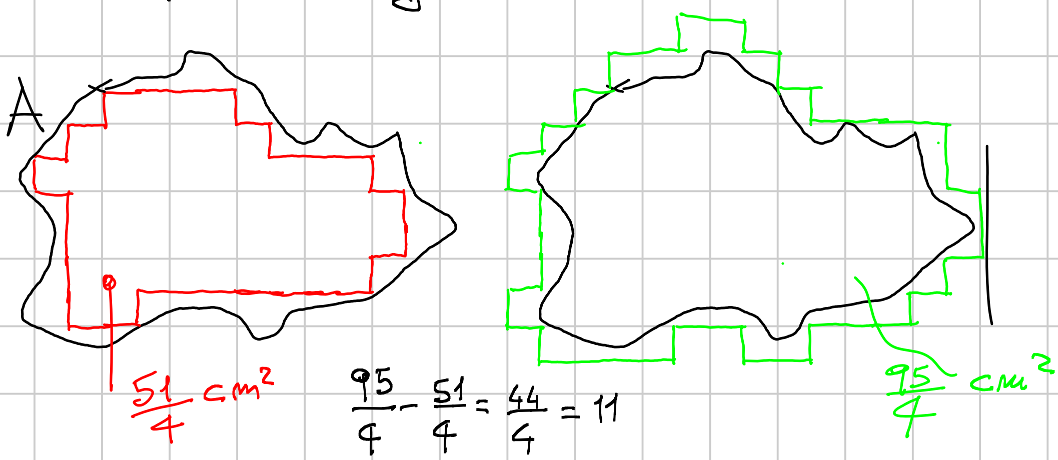


Approssimando dall'esterno, trovo 32 quadretti
" dall'interno, " 6 "

Quindi l'area di A sarà t.c. $6 \le \text{area } A \le 32$

- L'errore commesso è dato da $32 - 6 = 26 \text{ cm}^2$

Ma se l'unità di misura è + piccola, l'approssimazione non può che migliorare



$$\frac{95}{4} - \frac{51}{4} = \frac{44}{4} = 11$$

$$\frac{51}{4} \leq \text{area}(A) \leq \frac{95}{4}$$

Quindi siamo passati da quadrati di lato 1 cm a quadrati di lato 0,5 cm. L'approssimazione dell'area di A è migliorata in quanto

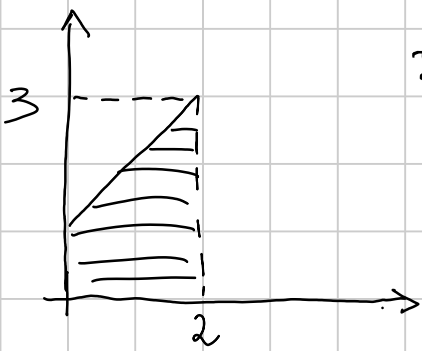
(Area esterna con lato 1) - (Area interna con lato 1) = 26 cm^2

$\vee$

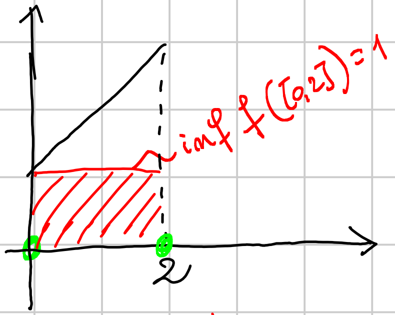
(Area esterna con lato $\frac{1}{2}$) - (Area interna con lato $\frac{1}{2}$) = 11 cm^2

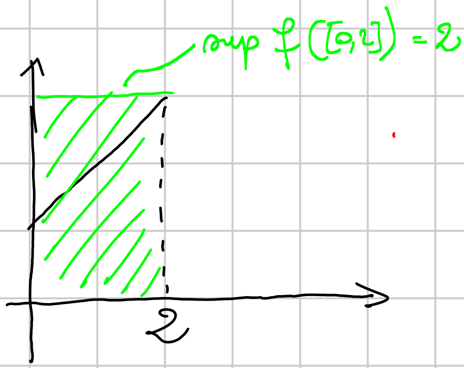
Più è piccolo il lato del quadratino della griglia, più aumenta la precisione con cui approssimo l'area di A, dove "precisione" = "Area ext - Area int"

Se si vuole approssimare l'area delimitata da $f(x)=x+1$, $x=0$, $y=0$, $y=2$. Questa figura è un trapezio di area 4 cm^2

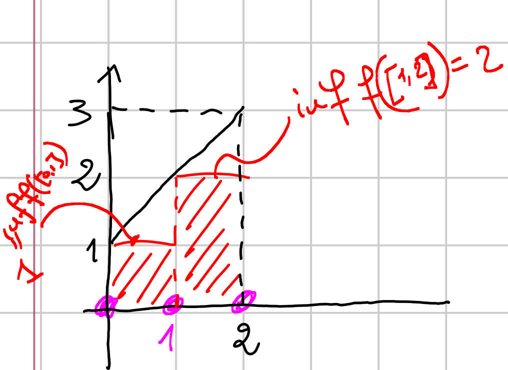


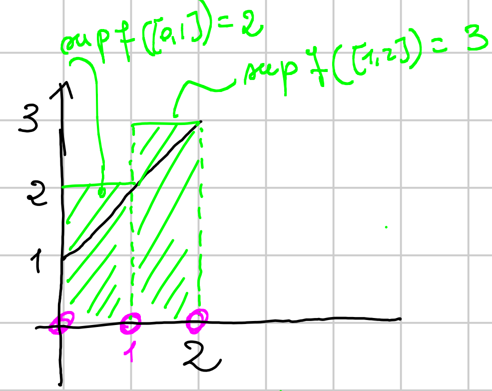
Dimentichiamo questo numero, ovvero non facciamo uso delle ns conoscenze di geometria elementare. Cerchiamo di approssimare





$s(f,\{0,2\}) = 2$ $\qquad$ $S(f,\{0,2\}) = 6$





$s(f,\{0,1,2\}) = 3$ $\qquad$ $S(f,\{0,1,2\}) = 5$

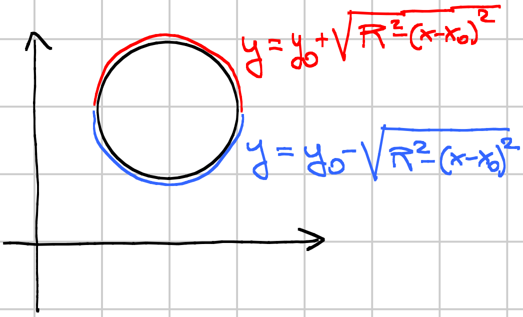
Quindi

$$2 < 3 < \text{Area} = 4 < 5 < 6$$

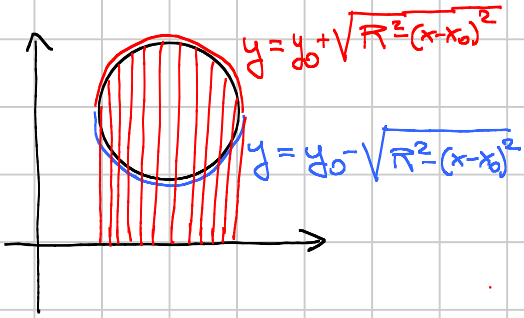
Aggiungendo punti, migliora l'approssimazione ovvero si riduce sempre la differenza tra area esterna e interna

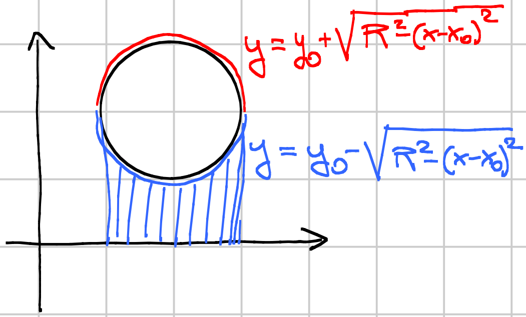
Che questo procedimento sia "buono" segue dal fatto che, fissato $\varepsilon > 0$, riesco e determinare un numero $\bar{m}$ t.c. preso $A_{\bar{m}} = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 2\}$ con $x_{i+1} - x_i = \dfrac{2-0}{\bar{m}}$ si ha

$$S(f, A_{\bar{m}}) - s(f, A_{\bar{m}}) < \varepsilon$$



$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$
$$\Downarrow$$
$$y=y_0\pm\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$$





L'area del cerchio si ottiene come differenza tra
(Area tratteggiata in rosso) − (Area tratteggiata in blu)

Oss: Questo procedimento di approssimazione

(Area Esterna) − (Area Interna)

è un buon procedimento se permette precisione sempre migliore all'aumentare della densità dei quadratini

ovvero si vuole che quando (lato quadratino) → 0

si abbia (Area Esterna) − (Area Interna) ⟶ 0

FONDAMENTALE

È il procedimento di limite che definisce l'area, e non viceversa

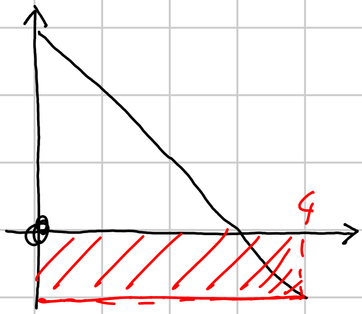
Approssimazioni integrale di $f=3-x$ su $[0,4]$

Si consideri $f(x)=3-x$ sull'intervallo $[0,4]$.
Vediamo come si comportano

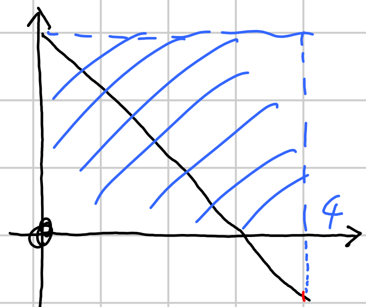
$$s(f,\mathcal{A}_k) \qquad S(f,\mathcal{A}_k)$$

quando $\mathcal{A}_k=\left\{k\cdot\frac{b-a}{n} : k=0,1,\dots,n\right\}=\left\{k\cdot\frac{4}{n} : k=0,\dots,n\right\}$
ovvero suddivisioni a "passo costante".

$\mathcal{A}_1=\{0,4\}$

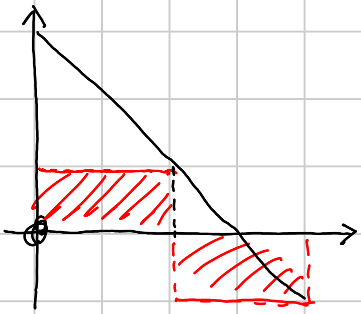


$s(f,\mathcal{A}_1)=(4-0)\cdot\inf f([0,4])=-4$

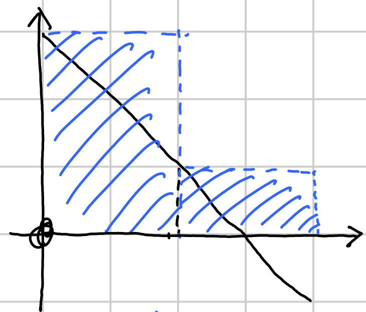


$S(f,\mathcal{A}_1)=(4-0)\sup f([0,4])=12$

$\mathcal{A}_2=\{0,2,4\}$



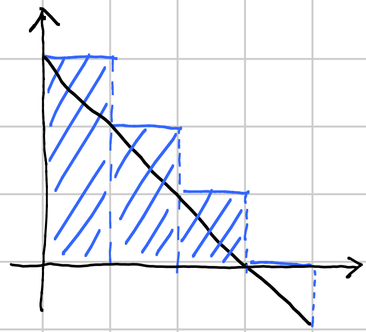
$s(f,\mathcal{A}_2)=$
$=(2-0)\inf f([0,2])+(4-2)\inf f([2,4])$
$=2\cdot 1+2(-1)=0$



$S(f,\mathcal{A}_2)=$
$=(2-0)\sup f([0,2])+(4-2)\sup f([2,4])$
$=2\cdot 3+2\cdot 1=8$

$\mathcal{A}_4=\{0,1,2,3,4\}$

$s(f,\mathcal{A}_4)=$
$(1-0)\inf f([0,1])+(2-1)\inf f([1,2])$
$+(3-2)\inf f([2,3])+(4-3)\inf f([3,4])=1\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot(-1)=2$



$S(f,\mathcal{A}_4)=(1-0)\sup f([0,1])+(2-1)\sup f([1,2])+\dots$
$=1\cdot 3+1\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 0=6$

e quindi si trova

$$s(f,\mathcal{A}_1) \le s(f,\mathcal{A}_2) \le s(f,\mathcal{A}_4) \le \overset{\text{area}(A)}{\top} \le S(f,\mathcal{A}_4) \le S(f,\mathcal{A}_2) \le S(f,\mathcal{A}_1)$$

$$-4 \le 0 \le 2 \le \text{area}(A) \le 6 \le 8 \le 12$$

Si può verificare in modo diretto che

$$s(f,\mathcal{A}_m) = \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1}-x_k) \cdot \inf f([x_k, x_{k+1}])$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \cdot \frac{4}{m} \cdot f(x_k) = \frac{4}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(3 - \frac{4k}{m}\right)$$

$$= \frac{4}{m} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} 3 - \frac{16}{m^2} \sum_{k=0}^{m-1} k$$

$$= \frac{4}{\cancel{m}_1} \cdot (3\cancel{m}) - \frac{\cancel{16}^{8}}{m^2} \frac{(m-1)\cdot m}{\cancel{2}_1} = 12 - 8 \cdot \frac{m^2-m}{m}$$

da cui

$$\lim_{m\to+\infty} S(f,\mathcal{A}_m) = 12-8 = 4$$

Analogamente si prova

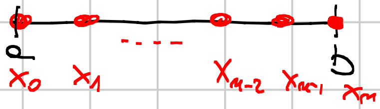
$$\lim_{m\to+\infty} s(f,\mathcal{A}_m) = 4$$

$\Rightarrow 4 \equiv$ Integrale definito della funzione $f = 3-x$ su $[0,4]$

Funzioni Riemann Integrabili

Def (suddivisione)

Dato un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato, un insieme di punti $\mathcal{A}=\{a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b\}$ viene detto "suddivisione dell'intervallo $[a,b]$"



Def (somme di Darboux)

Data una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, in corrispondenza ad una qualsiasi suddivisione $\mathcal{A}=\{x_0<\dots<x_n\}$

diciamo "somma di Darboux per difetto"

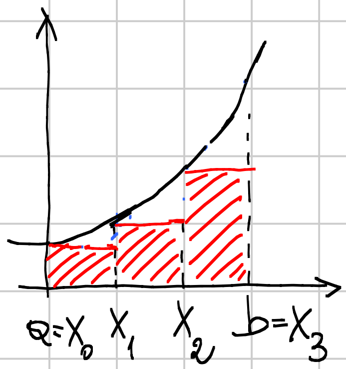
$$s(f,\mathcal{A}_{\sigma})=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\inf f([x_k,x_{k+1}])$$

diciamo "somma di Darboux per eccesso"

$$S(f,\mathcal{A}_{\sigma})=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\sup f([x_k,x_{k+1}])$$

Oss: banalmente $s(f,\mathcal{A})\le S(f,\mathcal{A})$

$\forall f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\forall\mathcal{A}$ suddivisione di $[a,b]$

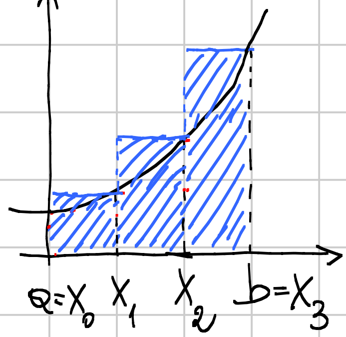


Posto $A=\{(x,y):\ a\le x\le b\quad 0\le y\le f(x)\}$ la regione individuata da $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ e $y=0$

Presa $\mathcal{A}=\{x_0<x_1<x_2<x_3\}$

$s(f,\mathcal{A})$ = la regione tratteggiata in rosso è la approssimazione per difetto della regione A

$=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot\inf f([x_k,x_{k+1}])$



$S(f,\mathcal{A})$ = la regione tratteggiata in blu è la approssimazione per eccesso della regione A

$=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\sup f([x_k,x_{k+1}])$

Si riconduce il calcolo di un'area al sommare le aree di tanti rettangolini

A questo punto si definiscono

$$s(f) = \sup\{s(f,\mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ suddivisione di } [a,b]\}$$ ← Integrale inferiore (misura interna)

$$S(f) = \inf\{S(f,\mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ suddivisione di } [a,b]\}$$ ← integrale superiore (misura ext)

Oss: per costruzione, se f è limitata allora si ha

$$s(f) \leq S(f) \quad (\text{segue da } s(f,\mathcal{A}) \leq S(f,\mathcal{A}) \ \forall \mathcal{A})$$

↑integrale inferiore ↑integrale superiore

Def (R-integrabilità - Integrabilità secondo Riemann)

Data $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, questa si dice R-integrabile o "integrabile" se

$$s(f) = S(f) = \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

Il numero $\int_a^b f(x)dx$ viene detto "Integrale definito di f su $[a,b]$"

Oss: Data $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, si ha

$$\inf f([a,b]) \leq f(x) \leq \sup f([a,b]) \qquad \forall x \in [a,b]$$

ovvero

$$\{(x,y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\} \subseteq [a,b] \times [\inf f([a,b]), \sup f([a,b])]$$

Quindi è vero anche

$$-\sup|f|([a,b]) \leq f(x) \leq \sup|f|([a,b])$$

da cui segue

$$\{(x,y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\} \subseteq [a,b] \times [-\sup|f|([a,b]), \sup|f|([a,b])]$$

Ne ottengo che $S(f) \leq (b-a) \cdot \sup|f|([a,b])$

Oss 1: Esistono funzioni integrabili (secondo Riemann)? SÌ

$f(x) = 5$ su $[0,3]$ è integrabile

e si ha $\int_0^3 f(x)\,dx = 5 \times (3-0) = 15$

Oss. 2) Data $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata,

esiste $\int_a^b f(x)\,dx$? Ovvero tutte le funzioni

limitate sono R-Integrabili?

NO e il controesempio è dato da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{su } [a,b] = [0,1]$$

Questo scende dal fatto che

$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, ovvero $\forall x_k < x_{k+1} \ \exists y \in \mathbb{Q}$

$x_k < y < x_{k+1}$

$$\Rightarrow \sup f([x_k, x_{k+1}]) = f(y) = 1$$

$$\Rightarrow S(f, A) = \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot \sup f([x_k, x_{k+1}])$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot 1$$

$$= (\cancel{x_1} - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + \dots + (\cancel{x_{m-1}} - \cancel{x_{m-2}}) + (x_m - \cancel{x_{m-1}})$$

$$= x_m - x_0 = 1 - 0 = 1 \qquad \forall A \text{ suddivisione di } [0,1]$$

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R} \Rightarrow \forall x_k < x_{k+1} \quad \exists z \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$$x_k < z < x_{k+1}$$

$$\Rightarrow \inf f([x_k, x_{k+1}]) = f(z) = 0$$

$$\Rightarrow s(f, \mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \inf f([x_k, x_{k+1}])$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot 0 = 0$$

$\forall \mathcal{A}$ suddivisione di $[0,1]$

Dunque

$s(f) = \sup\{s(f,\mathcal{A}) : \mathcal{A}$ suddivisione di $[0,1]\} = 0$

$\wedge$

$S(f) = \inf\{S(f,\mathcal{A}) : \mathcal{A}$ suddivisione di $[0,1]\} = 1$

e quindi f NON È integrabile

Teorema (Monotonia di $s(f,\mathcal{A})$ e $S(f,\mathcal{A})$)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, $[a,b]$ chiuso e limitato

i) $s(f,\mathcal{A}) \leq S(f,\mathcal{A}) \quad \forall \mathcal{A}$ suddivisione di $[a,b]$

ii) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ suddivisioni di $[a,b]$ $\Rightarrow$ $s(f,\mathcal{A}) \leq s(f,\mathcal{B})$

$$S(f,\mathcal{B}) \leq S(f,\mathcal{A})$$

iii) $\forall \mathcal{A},\mathcal{B}$ suddivisioni di $[a,b]$ $\quad s(f,\mathcal{A}) \leq S(f,\mathcal{B})$

e

$$s(f,\mathcal{B}) \leq S(f,\mathcal{A})$$

dim

i) Segue dalla definizione di

ii) Facciamo la dimostrazione nel caso in cui

$$\mathcal{B} = \{t\} \cup \mathcal{A} = \{a = x_0 < t < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

Nota: non è restrittivo prendere $x_0 < t < x_1$

Nota: se $\mathcal{B} = \{t_1, t_2\} \cup \mathcal{A}$ allora il risultato vale a maggior ragione in quanto $\{t_1, t_2\} \cup \mathcal{A} \supseteq \{t_1\} \cup \mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}$

$$s(f, \mathcal{B}) - s(f, \mathcal{A}) = (t - x_0) \inf f([x_0, t]) + (x_1 - t) \inf f([t, x_1])$$
$$+ \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \inf f([x_k, x_{k+1}])} - (x_1 - x_0) \inf f([x_0, x_1]) +$$
$$- \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \inf f([x_k, x_{k+1}])} \geq$$

$$\geq (t - x_0) \inf f([x_0, x_1]) + (x_1 - t) \inf f([x_0, x_1]) - (x_1 - x_0) \inf f([x_0, x_1])$$

$$= \inf f([x_0, x_1]) \cdot (t - x_0 + x_1 - t - x_1 + x_0) = 0$$

ovvero $s(f, \mathcal{B}) - s(f, \mathcal{A}) \geq 0$ ovvero $s(f, \mathcal{A}) \leq s(f, \mathcal{B})$.

Analogamente si dimostra che

$$S(f, \mathcal{B}) \leq S(f, \mathcal{A})$$

iii) Date $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, in generale si avrà
$$\mathcal{A} \nsubseteq \mathcal{B} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{A}$$

ovvero non sono confrontabili. Presa la suddivisione $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ si ha

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} \overset{\text{proprietà}}{\underset{ii)}{\Longrightarrow}} s(f, \mathcal{A}) \leq s(f, \mathcal{C})$$
$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \overset{\text{proprietà}}{\underset{ii)}{\Longrightarrow}} S(f, \mathcal{C}) \leq S(f, \mathcal{B}) \Rightarrow s(f, \mathcal{A}) \leq S(f, \mathcal{B})$$
$$\forall \mathcal{C} \qquad \underset{\uparrow \text{ per la } i)}{s(f, \mathcal{C}) \leq S(f, \mathcal{C})}$$

Teorema (C.N.S. di Integrabilità)

Data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata su $[a,b]$ chiuso e limitato

Sono tra loro equivalenti

i) f è R-Integrabile su $[a,b]$

ii) $\forall\varepsilon>0\ \exists\, \mathcal{A}_\varepsilon\, \mathcal{B}_\varepsilon$ suddivisioni : $S(f,\mathcal{A}_\varepsilon)-s(f,\mathcal{B}_\varepsilon)<\varepsilon$

iii) $\forall\varepsilon>0\ \exists\, \mathcal{C}_\varepsilon$ suddivisione : $S(f,\mathcal{C}_\varepsilon)-s(f,\mathcal{C}_\varepsilon)<\varepsilon$

dim

i) significa $S(f)=\int_a^b f(x)\,dx = s(f)$, e dunque

$$\sup\{s(f,\mathcal{B}) : \mathcal{B}\text{ suddivisione}\} \overset{(1)}{=} \int_a^b f(x)\,dx \overset{(2)}{=} \inf\{S(f,\mathcal{A}) : \mathcal{A}\text{ suddivisione}\}$$

che equivale, per definizione di sup e inf, a

$$\forall\varepsilon>0\ \begin{cases}\exists\,\mathcal{B}_\varepsilon \text{ suddivisione} : & s(f,\mathcal{B}_\varepsilon)>\int_a^b f(x)\,dx-\varepsilon/2\\ \exists\,\mathcal{A}_\varepsilon \quad " & : S(f,\mathcal{A}_\varepsilon)<\int_a^b f(x)\,dx+\varepsilon/2\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\mathcal{A}_\varepsilon,\mathcal{B}_\varepsilon \text{ suddivisioni} : \begin{cases}-s(f,\mathcal{B}_\varepsilon)<-\int_a^b f(x)\,dx+\varepsilon/2\\ S(f,\mathcal{A}_\varepsilon)<\int_a^b f(x)\,dx+\varepsilon/2\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\mathcal{A}_\varepsilon,\mathcal{B}_\varepsilon \text{ suddivisioni} : \quad S(f,\mathcal{A}_\varepsilon)-s(f,\mathcal{B}_\varepsilon)<\varepsilon$$

Abbiamo provato i) $\Leftrightarrow$ ii)

A questo punto dobbiamo provare ii) $\Leftrightarrow$ iii)

iii) $\Rightarrow$ ii) Banalmente: è sufficiente prendere $\mathcal{A}_\varepsilon=\mathcal{B}_\varepsilon=\mathcal{C}_\varepsilon$

ii) $\Rightarrow$ iii) $\mathcal{A}_\varepsilon$ e $\mathcal{B}_\varepsilon$ non sono confrontabili tra loro

– in generale – però $\mathcal{A}_\varepsilon\subseteq\mathcal{C}_\varepsilon=\mathcal{A}_\varepsilon\cup\mathcal{B}_\varepsilon$ e $\mathcal{B}_\varepsilon\subseteq\mathcal{C}_\varepsilon$

da cui segue

$$s(f,\mathcal{B}_\varepsilon)\le s(f,\mathcal{C}_\varepsilon)\le S(f,\mathcal{C}_\varepsilon)\le S(f,\mathcal{A}_\varepsilon)$$

e dunque

$$S(f,\mathcal{C}_\varepsilon)-s(f,\mathcal{C}_\varepsilon)\le S(f,\mathcal{A}_\varepsilon)-s(f,\mathcal{C}_\varepsilon)$$

da cui segue la tesi $\quad\not{\!\!\!\square}$

CLASSI DI FUNZIONI INTEGRABILI

Teorema (monotonia $\Rightarrow$ integrabilità)
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata in $[a,b]$
Se f è debolmente crescente (decrescente) in $[a,b]$
allora f è R-integrabile

dim

Supponiamo f debolmente crescente: si ha che
$\forall x_k, x_{k+1} \in A \qquad \min f([x_k, x_{k+1}]) = f(x_k)$
$\max f([x_k, x_{k+1}]) = f(x_{k+1})$

e dunque
$$s(f,A) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \inf f([x_k, x_{k+1}])$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k)$$

$$S(f,A) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \sup f([x_k, x_{k+1}])$$

$\Downarrow$

$$S(f,A) - s(f,A) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_n) \cdot \left[\sup f(x_k) - \inf f(x_k) \right]$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \left[\max f(x_k) - \min f(x_k) \right]$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \left[f(x_{k+1}) - f(x_k) \right]$$

Introduciamo poi la suddivisione equispaziata
$$\mathcal{C}_n = \left\{ a + \frac{b-a}{n} \cdot k : k = 0,1,\dots,n \right\} = \left\{ a < a + \frac{b-a}{n} < a + \frac{b-a}{n} \cdot 2 < \dots < a + n\frac{b-a}{n} = b \right\}$$
e si ha
$$S(f,\mathcal{C}_n) - s(f,\mathcal{C}_n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \left[f(x_{k+1}) - f(x_k) \right]$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \left[\left(\cancel{f(x_1)} - f(x_0) \right) + \left(f(x_2) - \cancel{f(x_1)} \right) + \dots + \left(f(x_n) - \cancel{f(x_{n-1})} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{n} \cdot (b-a) \cdot \left[f(b) - f(a) \right]$$

e si riconosce che $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}(b-a)(f(b)-f(a)) = 0$, dunque

$\forall \varepsilon > 0 \ \mathcal{T}_\varepsilon = \mathcal{T}_{n(\varepsilon)}$ suddivisione : $S(f, \mathcal{T}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{T}_\varepsilon) < \varepsilon$

(è sufficiente prendere n : $\frac{1}{n}(b-a)(f(b)-f(a)) < \varepsilon$) //

Da un punto di vista grafico si può rappresentare la dimostrazione come segue :