Alcuni argomenti complementari

1) Le funzioni iperboliche

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

definite $\forall x \in \mathbb{R}$

Si possono dimostrare le seguenti proprietà

- $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

- $\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \operatorname{senh} x$

- $\cosh(0) = 1 = \min \cosh(\mathbb{R})$
  $\sup \cosh(\mathbb{R}) = +\infty$
  $\cosh(x)$ è convessa su $\mathbb{R}$
- $\operatorname{senh} x$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$
  $\inf \operatorname{senh}(\mathbb{R}) = -\infty$
  $\sup \operatorname{senh}(\mathbb{R}) = +\infty$

  $$\operatorname{senh} x \text{ è } \begin{cases} \text{concava se } x < 0 \\ \text{convessa se } x > 0 \end{cases}$$

  $x = 0$ è punto di flesso

La funzione $f(x) = \operatorname{senh} x$ è quindi invertibile su $\mathbb{R}$, e la sua inversa è detta "settorseno iperbolico di x" e si scrive
$f^{-1}(x) = \operatorname{settsenh} x$

Si ha $\displaystyle (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{settsenh}(y))}$

$$(*) \qquad = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2(\operatorname{settsenh}(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

ovvero

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \omega \quad \text{se} \quad e^{2x} - 1 = 2\omega e^x$$

$$\text{se} \quad e^{2x} - 2\omega e^x - 1 = 0 \quad \text{se} \quad e^x = \omega \pm \sqrt{\omega^2+1}$$

ma la radice $\omega - \sqrt{\omega^2+1}$ non è accettabile (perché?)

e quindi $\quad x = \log\left(\omega + \sqrt{\omega^2+1}\right)$

Dunque $\operatorname{settsenh} \omega = \log\left(\omega + \sqrt{\omega^2+1}\right)$

$$\frac{d}{d\omega} \operatorname{settsenh} \omega = \frac{1}{\omega + \sqrt{\omega^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\omega + \sqrt{\omega^2+1}}} \cdot \frac{\cancel{\omega + \sqrt{\omega^2+1}}}{\sqrt{\omega^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

e quindi abbiamo confermato in un altro modo che $(*)$ è corretta

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$$

Proviamolo in modo formale (ovvero senza giustificare i passaggi)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{se} \quad -1 < x < 1$$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$\Downarrow$ ← vero? come si dimostra?

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots = \log|1-x|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \log|1-x|$$

$\Downarrow$ ← vero? come si dimostra?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \log|1-(-1)| = \log 2$$

3) La successione $\{x_n\}_n$ definita da

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) & n \geq 0 \end{cases}$$

ha come limite $\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{2}$

Per provarlo si osserva che

1) per induzione si prova $x_n \geq \sqrt{2} \; \forall n$
2) " " " " $x_{n+1} \leq x_n \; \forall n$
3) $\lim_n x_{n+1} = \lim_n \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$ -

$$\Downarrow$$

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\ell = \sqrt{2}$$

Fissato $\alpha > 0$, la successione $\{x_n\}_n$

$$\begin{cases} x_0 > \sqrt{\alpha} \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) \end{cases}$$ converge?

e se converge, quale è il suo limite?

4) Osservando che

$(k+1)^2 - k^2 = 2k+1 \qquad k = 1, 2, 3, ---, n$

dedurne che

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

5) Osservando che

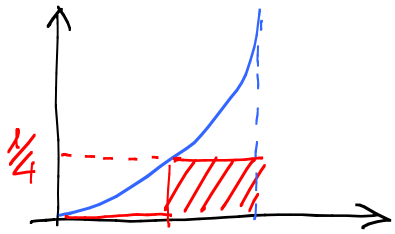
$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1 \qquad k=1,2,\dots,m$$

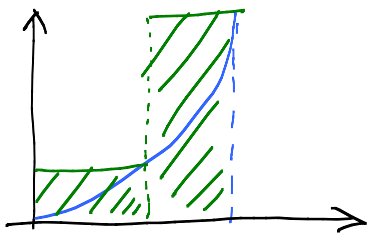
dedurne che

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(2m+1)(m+1)}{6}$$

6) Area del sottografico di $y=x^2$

$$\text{area}\,\{(x,y) : 0 \le y \le x^2,\ x\in[0,1]\} = 1/3$$





$m=2 \qquad \mathcal{A}_2 = \{0, 1/2, 1\}$

$$s(f,\mathcal{A}_2) = \sum_{k=0}^{1} (x_{k+1}-x_k)\inf f([x_k,x_{k+1}])$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}-0\right)\cdot f(0) + \left(1-\tfrac{1}{2}\right)\cdot f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8}$$

$$S(f,\mathcal{A}_2) = \sum_{k=0}^{1} (x_{k+1}-x_k)\sup f([x_k,x_k])$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}-0\right)\cdot f\left(\tfrac{1}{2}\right) + \left(1-\tfrac{1}{2}\right)\cdot f(1) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{5}{8}$$

Fissato m, $\mathcal{A}_m = \left\{\frac{1}{m}\cdot k \ : \ k=0,1,\dots,m\right\}$

$$s(f,\mathcal{A}_m) = \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1}-x_k)\inf f([x_k,x_{k+1}])$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m}\cdot f\left(\frac{k}{m}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m}\cdot\frac{k^2}{m^2}$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

Analogamente

$$S(f, \mathcal{A}_n) = \sum_{k=0} (x_{k+1} - x_k) \sup f([x_k, x_{k+1}])$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{(k+1)^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 \underset{h=k+1}{=} \frac{1}{n^3} \sum_{h=1}^{n} h^2$$

Dunque (perché?)

$$\lim_{n \to +\infty} s(f, \mathcal{A}_n) = \lim_{n \to +\infty} S(f, \mathcal{A}_n) = 1/3$$

e questo valore comune delle approssimanti per difetto e per eccesso rappresenta l'area del settore parabolico