TUTORATO

Titolo nota 13/03/2014

DEF: $f: I \to \mathbb{R}$ si dice CONVESSA se $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0,1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

ESERCIZI:

1) Composizione di funzioni convesse è convessa?

In generale no. CONTROESEMPIO:

Siano $f(x) = -x$ e $g(x) = x^2$.

f è sia concava che convessa su $\mathbb{R}$

g è convessa su $\mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) := f(g(x)) = -x^2$ è concava su $\mathbb{R}$.

Dobbiamo aggiungere l'ipotesi che f sia CRESCENTE (debolmente).

- Sia $f: I \to \mathbb{R}$ convessa e crescente
  $g: I' \to I$ convessa
  Allora $f \circ g$ è convessa.

N.B. in generale il codominio di g dev'essere contenuto nel dominio di f per poter definire $f \circ g$.

DIM.: Siano $x, y \in I$ e $t \in [0,1]$

$$(f \circ g)(tx + (1-t)y) := f(g(tx + (1-t)y)) \leq$$

$$\leq f(t g(x) + (1-t) g(y)) \leq$$

f crescente e g convessa

$$\leq t f(g(x)) + (1-t) f(g(y)) \quad \square$$

Si può anche dimostrare in questo modo:

derivata prima: $f'(g(x)) \cdot g'(x)$

derivata seconda: $\underbrace{f''(g(x))}_{\geq 0 \; \text{f convessa}} \underbrace{[g'(x)]^2}_{\geq 0} + \underbrace{f'(g(x))}_{\geq 0 \; \text{f crescente}} \cdot \underbrace{g''(x)}_{\geq 0 \; \text{g convessa}} \geq 0$

2) Reciproco di una funzione convessa è convessa?

In generale no. CONTROESEMPIO:

$f(x) = -\sqrt{x}$ per $x > 0$. f è convessa

$\dfrac{1}{f(x)} = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ è concava, infatti:

derivata prima: $-\dfrac{1}{f^2(x)} \cdot f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

derivata seconda: $\dfrac{1}{2x^3} \cdot \left(-\dfrac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\right) = -\dfrac{3}{4x^2\sqrt{x}} < 0$

$\forall x > 0$.

Reciproco di una funzione convessa è concava?

In generale no. CONTROESEMPIO:

$f(x) = x^2$ è convessa

$\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x^2}$ è convessa.

3) Combinazione lineare di funzioni convesse è convessa?

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad (\alpha f + \beta g)(x) := \alpha f(x) + \beta g(x)$

Se $\alpha \circ \beta < 0$ no. Infatti per $\alpha = -1$, f convessa, $\alpha f = -f$ che è concava.

- Siano $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convesse. Allora $\forall \alpha, \beta \geq 0$

  $\alpha f + \beta g$ è convessa.

DIM: $\quad \forall x, y \in I \quad , \forall t \in [0,1]$

$$(\alpha f + \beta g)(tx + (1-t)y) := \alpha f(tx + (1-t)y) + \beta g(tx + (1-t)y) \underset{\substack{f,g \text{ convesse} \\ \text{e } \alpha, \beta \geq 0}}{\leq} \alpha t f(x) + \alpha (1-t) f(y) +$$

$$+ \beta t g(x) + \beta (1-t) g(y) = t(\alpha f(x) + \beta g(x)) + (1-t)(\alpha f(y) + \beta g(y)) =: t(\alpha f + \beta g)(x) +$$

$$+ (1-t)(\alpha f + \beta g)(y). \quad \square$$

ESERCIZIO:

Siano $f: I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ t.c. $f(x_0) < 0$, $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ e $f^{IV}(x_0) > 0$.
Allora x_0 è un punto di minimo.

DIM: Sviluppo di Taylor centrato in x_0 di ordine 4:

$$f(x) = f(x_0) + \cancel{f'(x_0)(x-x_0)} + \cancel{\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2} + \cancel{\frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3} + \frac{f^{IV}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + o((x-x_0)^4)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f^{IV}(x_0)}{4!}}_{>0} \underbrace{(x-x_0)^4}_{\geq 0} + \underset{\underbrace{(x-x_0)^4}_{\geq 0} \cdot o(1)}{\overset{\shortparallel}{o((x-x_0)^4)}}$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \quad \text{in un intorno di } x_0$$

↑ Infatti,

dividendo tutto per $(x-x_0)^4$ e passando al limite per $x \to x_0$:

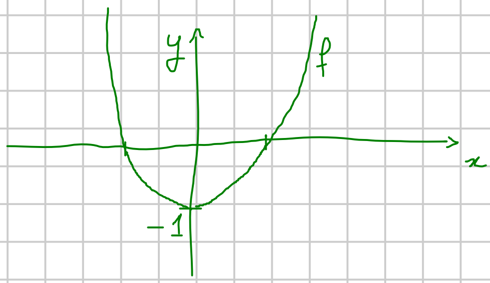
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^4} = \frac{f^{IV}(x_0)}{4!} > 0$$

e per la permanenza del segno $\exists\, \delta > 0$ t.c.

$$\forall x,\ |x - x_0| < \delta : \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^4} > 0 \qquad \square$$

ESEMPIO:

$f(x) = x^4 - 1$, $x_0 = 0$



$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2$

$f'''(x) = 24x$

$f^{IV}(x) = 24$

$\Rightarrow f(0) = -1 < 0, \quad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$
e $f^{IV}(0) = 24 > 0$.

ESERCIZIO: Sia $f(x) = 3x - x^2 + 5x^5 + o(x^6)$
Dire quanto valgono le derivate di f in $x_0 = 0$.

Sviluppo di Taylor di f in $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2} f''(0)\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!} x^4 + \frac{f^{V}(0)}{5!} x^5 + \frac{f^{VI}(0)}{6!} x^6 + o(x^6)$$

Da cui si ottiene, per il principio di identità dei polinomi:

$$f'(0) = 3$$

$$\frac{f''(0)}{2} = -1 \iff f''(0) = -2$$

$$\frac{f'''(0)}{6} = 0 \iff f'''(0) = 0$$

$$\frac{f^{IV}(0)}{4!} = 0 \iff f^{IV}(0) = 0$$

$$\frac{f^{V}(0)}{5!} = 5 \iff f^{V}(0) = 600$$

$$\frac{f^{VI}(0)}{6!} = 0 \iff f^{VI}(0) = 0$$

ESERCIZIO: Trovare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di intersezioni reali tra la retta $y = -2x + k$ e il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} .$$

Ovvero, l'esercizio chiede di studiare la funzione $g(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 2x$ e determinare il numero di soluzioni reali dell'equazione $g(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$.

- Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

- Limiti: $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 2^-} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$

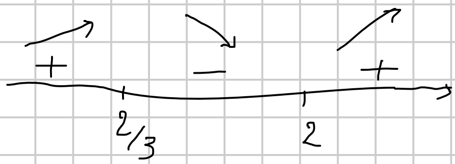
- Segno: $g(x) \geq 0 \iff \frac{2x^3 - 8x^2 + 8x + 1}{(x-2)^2} \geq 0 \quad (*)$

$\nwarrow$ è sempre > 0

pb: quando è $2x^3 - 8x^2 + 8x + 1 \geq 0$?

Proviamo a derivarlo: $6x^2 - 16x + 8 \geq 0$?

$3x^2 - 8x + 4 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{3}$ $\begin{cases} 2 \\ 2/3 \end{cases}$



Il numeratore di $(*)$ ha un massimo in $\left(\frac{2}{3}, \frac{191}{27}\right)$ e un minimo in $(2, 1)$.

In 0, assume il valore 1.

Quindi $\exists!\, a < 0$ t.c. $g(x) = 0$

$\Rightarrow \quad g(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq a.$

- Derivata : $\quad g'(x) = 2 - \dfrac{2}{(x-2)^3}$

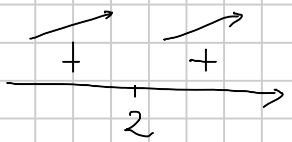
$$g'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2(x^3 - 6x^2 + 12x - 9)}{(x-2)^3} \geq 0$$

D: $\quad (x-2)^3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 2$

N: $\quad x^3 - 6x^2 + 12x - 9 \geq 0 \quad ?$

Deriviamo N. $\quad 3x^2 - 12x + 12 \geq 0 \quad ?$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$



N è crescente. Cos'è 2?

Derivata 2° di N : $\quad 6x - 12$. Calcolata in 2 si annulla.

Derivata 3° di N : $\quad 6 > 0 \quad \forall x$

Ovvero: 2 è un punto di flesso a tg orizzontale per N.

N calcolato in 2 è < 0

$\Rightarrow \quad \exists!\, b > 2 \quad$ t.c. $\quad N = 0$

Proviamo $b = 3$: $\quad g'(3) = 0$

Scompongo N dividendolo per $x - 3$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -6x^2 & +12x & -9 & x-3 \\
-x^3 & +3x^2 & & & \\
\hline
// & -3x^2 & +12x & -9 & x^2-3x+3 \\
 & 3x^2 & -9x & & \\
\hline
 & // & 3x & -9 & \\
 & & -3x & +9 & \\
\hline
 & & // & // &
\end{array}
$$

$\Rightarrow \quad N: \quad (x-3)(x^2-3x+3)$

$x^2-3x+3=0 \iff x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2}$ imp.

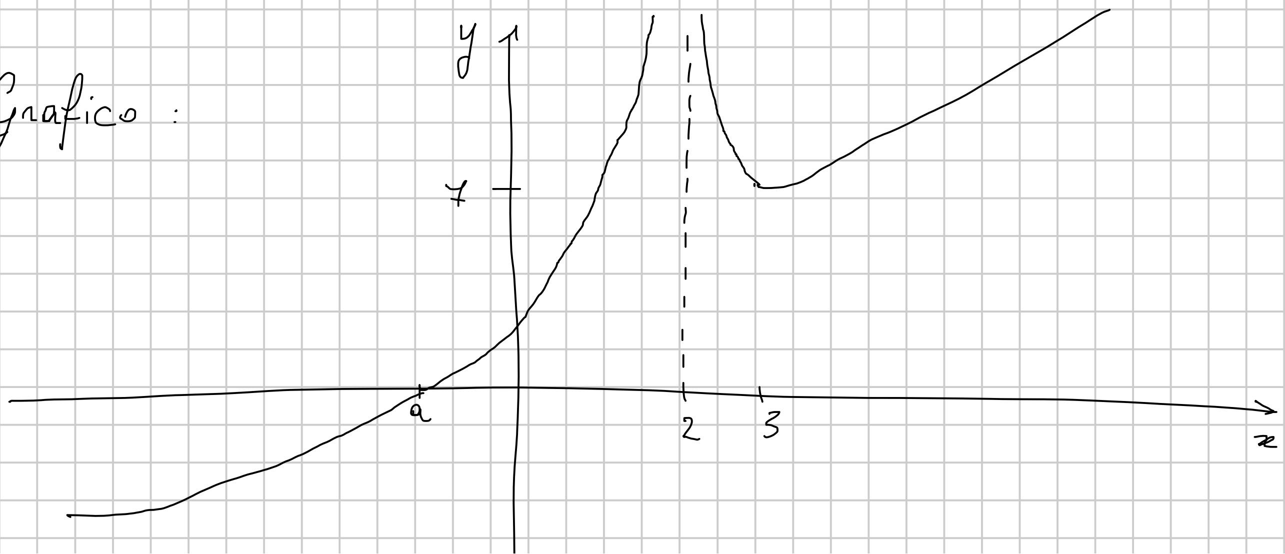
Quindi $\quad x^2-3x+3>0 \quad \forall x$

Da cui $\quad N \geq 0 \iff N \geq 3$.

		2		3		
N	$-$		$-$		$+$	
D	$-$		$+$		$+$	
	$+$		$-$		$+$	g'
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	g

$g(3)=7$ minimo locale

• Grafico :



Quindi, se $k < 7$, $g(x) = k$ ha 1 soluzione;

se $k = 7$, $g(x) = k$ ha 2 soluzioni;

se $k > 7$, $g(x) = k$ ha 3 soluzioni.