Analisi Matematica 1 - Lezione dell'11 marzo 2014

Teorema ①: $f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo

Sono equivalenti

i) f convessa su I (strettamente)

ii) $\forall x_0 \in I$, $R_{x_0}(x)$ è crescente su $I \setminus \{x_0\}$ (strettamente)

(vedi la lezione del 10 marzo 2014

Teorema ②: $f: I \to \mathbb{R}$ convessa, I intervallo $\Rightarrow$ f continua su $\mathring{I}$

N.B. Non c'è controllo sulla frontiera di I!!!

Fisso $x_0 \in \mathring{I}$ (dim) devo provare $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$

$$\lim_{x \to x_0^-} \left(f(x) - f(x_0)\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0^-} (x - x_0) = f'_-(x_0) \cdot 0$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0^+} (x - x_0)$$

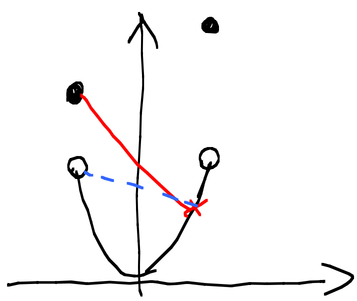
$$= f'_+(x_0) \cdot 0 = 0$$

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x = -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

è convessa su $[-1, 1]$

ma non è continua in $x = -1, 1$



Teorema ③: $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile su I

Sono equivalenti

i) f convessa su I

ii) $\forall x_1, x_2 \in I \quad f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$

e

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

dim

i) $\Rightarrow$ ii) presi $x_1 < x_2$, per il Teorema ① $R_{x_1}(x)$ crescente su $I \setminus \{x_1\}$

$$\Rightarrow R_{x_1}(x) \leq R_{x_1}(x_2) \qquad \forall x < x_2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_1} R_{x_1}(x) = f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \qquad x_2 - x_1 > 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1)$$

Supponiamo ora $x_1 > x_2$

$$R_{x_1}(x) \geq R_{x_1}(x_2) \qquad x > x_2$$

$$\lim_{x \to x_1} R_{x_1}(x) = f'(x_1) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1)$$

$$\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Adesso, per provare $f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$ basta scambiare x_1 con x_2 nella dim precedente

ii) $\Rightarrow$ i) Fissati $x<y$, $\forall \omega \in (x,y)$ si ha per ipotesi

$$\begin{cases} f(x) \geq f(\omega) + f'(\omega)(x-\omega) \\ f(y) \geq f(\omega) + f'(\omega)(y-\omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(\omega)}{x-\omega} \leq f'(\omega) \leq \frac{f(y)-f(\omega)}{y-\omega}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(y)(x-\omega) - f(\omega)(x-\omega) - f(x)(y-\omega) + f(\omega)(y-\omega)}{(x-\omega)(y-\omega)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(\omega)(y-x) - f(x)(y-\omega) - f(y)(\omega-x)}{(x-\omega)(y-\omega)} \geq 0$$

$x<\omega<y$

$$\Rightarrow \quad f(\omega)(y-x) - f(x)(y-\omega) - f(y)(\omega-x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad (y-x)\left[f(\omega) - f(x)\frac{y-\omega}{y-x} - f(y)\frac{\omega-x}{y-x}\right] \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad f(\omega) \leq f(x)\frac{y-\omega}{y-x} + f(y)\frac{\omega-x}{y-x}$$

$\forall \omega \in (x,y)$

e quindi, per il Teorema visto nella lezione del 10/3/14, questa è la disuguaglianza di convessità

Teorema ④: (f convessa sse f' crescente su I)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile su I
Sono tra loro equivalenti

i) f convessa su I
ii) f' crescente su I

dim

i) $\Rightarrow$ ii) f convessa sse (per il Teorema 3)

$$\forall x_1 < x_2 \quad \begin{cases} f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \\ f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_1) - f(x_2) \geq f'(x_2)(x_1 - x_2) \\ f(x_2) - f(x_1) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Avendo supposto $x_1 - x_2 < 0 < x_2 - x_1$

$$\begin{cases} \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq f'(x_2) \\ \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f'(x_1) \end{cases} \Rightarrow f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

$$\Rightarrow f'(x_1) \leq f'(x_2)$$ cioè la Tesi

ii) $\Rightarrow$ i) per ipotesi $x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) \leq f'(x_2)$

Per il Teorema di Lagrange $\exists\, \omega \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f'(\omega) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Per la ii) $f'(x_1) \leq f'(\omega) = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq f'(x_2)$

ed essendo $x_1 - x_2 < 0 < x_2 - x_1$ si ha $\begin{cases} f(x_1) - f(x_2) \geq f'(x_2)(x_1 - x_2) \\ f(x_1) - f(x_2) \leq f'(x_1)(x_1 - x_2) \end{cases}$

da cui segue $\begin{cases} f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \\ f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \end{cases}$

da cui segue la convessità di f per il Teorema 3 $\lightning$

Nota: Se $f'(x)$ strettamente crescente allora f strettamente convessa

Teorema 5 (f convessa se $f'' \geq 0$)
$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile 2 volte
Sono tra loro equivalenti
i) f convessa su I
ii) $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

dim

$f''(x) = (f'(x))' \geq 0 \overbrace{\ }^{\forall x \in I}$ equivale a dire che $f'(x)$ crescente $\overbrace{\ }^{\text{su } I}$ che a sua volta equivale (per il Teorema 4) a f convessa su I $\lightning$

Esercizio: Determinare, se ne esistono, i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) = e^{\alpha x} - (1+\alpha)x^2$$

risulti convessa su $\mathbb{R}$

dim

f è derivabile 2 volte, dunque cerchiamo per il Teorema 5, quei valori di α t.c.
$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$f'(x) = \alpha e^{\alpha x} - 2(1+\alpha)x$
$f''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x} - 2(1+\alpha)$

posto $g(x) = \alpha^2 e^{\alpha x} - 2(1+\alpha)$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \alpha < 0 \\ -2 & \alpha = 0 \\ -2(1+\alpha) & \alpha > 0 \end{cases}$$

da cui si deduce che, per avere $g \geq 0$, debbo avere necessariamente $\alpha < 0$

$$\alpha < 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -2(1+\alpha)$$

e necessariamente debbo avere $-2(1+\alpha) \geq 0$ ovvero $1+\alpha \leq 0$ ovvero $\boxed{\alpha \leq -1}$

Dunque $f'' = g \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq -1$

Ma quando $\alpha \leq -1$ si ha che

$$g(x) = \alpha^2 e^{\alpha x} - 2(1+\alpha) \geq \alpha^2 e^{\alpha x} > 0$$
$$\forall \alpha \leq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ne segue che f convessa strettamente su $\mathbb{R}$ $\forall \alpha \leq -1$

Esercizio: $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ strett. crescente
(ovvero $f'(x) > 0 \ \forall x \in]a,b[$)
f derivabile due volte

$$\Rightarrow (f^{-1})''(f(x)) = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$$

Ne segue che

f convessa crescente $\Rightarrow f^{-1}$ concava crescente
f concava " $\Rightarrow f^{-1}$ convessa crescente

dim

Nelle ipotesi fatte esistono $(f^{-1})'(f(x))$ e $(f^{-1})''(f(x))$. Vediamo come calcolarle

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \\ (f^{-1})''(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f'(x) + (f^{-1})'(f(x)) \cdot f''(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} (f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)} \\ (f^{-1})''(f(x)) \cdot (f'(x))^2 + \dfrac{1}{f'(x)} \cdot f''(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(f^{-1})''(f(x)) = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$$

Problema ① Dimostrare o dare controesempio

i) $f, g : I \to \mathbb{R}$ convesse $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $f+g$ convessa ?

ii) $f, g : I \to \mathbb{R}$ convesse $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $f \cdot g$ convessa ?

iii) f concava, $f > 0$ $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $1/f$ convessa ?

La i) è vera : dimostrare!

La ii) " falsa : $f(x) = x^2$ convessa
$g(x) = x$ convessa
ma $f \cdot g = x^3$ non è convessa
" " concava

Vediamo la iii) quando f derivabile 2 volte

$$\left(\frac{1}{f}\right)'' = \left(-\frac{f'}{f^2}\right)' = -\frac{f''f^2 - 2f(f')^2}{f^4} =$$

$$= -\frac{f'' - 2f'^2}{f^3}$$