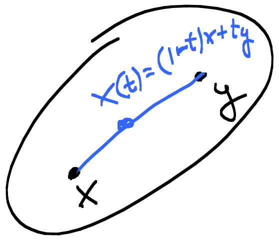
Analisi Matematica 1 - Lunedì 10 marzo 2014

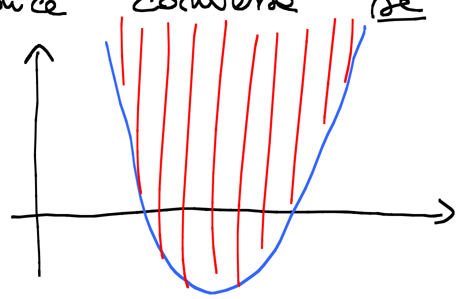
Def $C \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice "convesso" se
$\forall x, y \in C \qquad (1-t)x + ty \in C \quad \forall t \in (0,1)$



Ovvero dati 2 punti di C, il segmento che li congiunge è contenuto in C

Oss: Una def equivalente potrebbe essere
"C convesso se $\forall x, y \in \partial(C) \quad (1-t)x+ty \in C \ \forall t \in (0,1)$"
(ovvero ci si può limitare a prendere i punti x e y sulla frontiera di C)

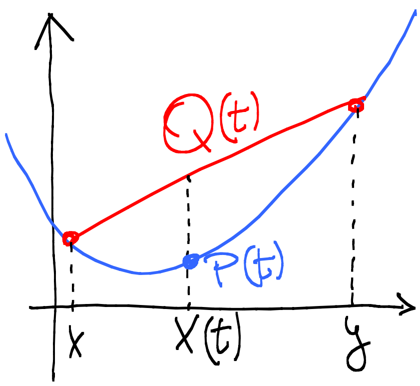
Def (f.ne convessa) $f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo
si dice "convessa" se $\underbrace{\{(x,y) : y \geq f(x), x \in I\}}_{\text{epigrafico di } f}$ è convesso



Def (f.ne concava) $f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo si dice "concava" se $-f$ è convessa

Def (convessità) $f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo si dice "convessa" se $\forall x, y \in I$ e $\forall t \in (0,1)$ si ha
$f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$

Interpretazione geometrica della convessità



$x(t) = (1-t)x + ty \qquad t \in (0,1)$
$r(x(t)) = (1-t)f(x) + tf(y)$

$Q(t) = (x(t), r(x(t)))$
$= (x(t), (1-t)f(x) + tf(y))$
$P(t) = (x(t), f(x(t)))$

Convessità se $P(t)$ "sta sotto" $Q(t)$ $t \in (0,1)$

se $f(x(t)) \leq r(x(t))$ $t \in (0,1)$

N.B. $Q(t) = (1-t)\,(x, f(x)) + t\,(y, f(y))$ $t \in (0,1)$

Esempio $f(x) = |x|$ convessa su $\mathbb{R}$

dim

fisso $x, y \in \mathbb{R}$ $x < y$. Si ha, $\forall t \in (0,1)$

$$f((1-t)x + ty) = |(1-t)x + ty| \leq (1-t)|x| + t|y| = (1-t)f(x) + tf(y)$$

Esempio $f(x) = x^2$ è convessa su $\mathbb{R}$

dim

Fissati $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ devo provare

$$((1-t)x + ty)^2 \leq (1-t)x^2 + ty^2 \quad \forall t \in (0,1)$$

Ma questo equivale a

$$(1-t)^2x^2 + t^2y^2 + 2t(1-t)xy \leq (1-t)x^2 + ty^2 \quad \forall t \in (0,1)$$

ovvero equivale a

$$(1-t)x^2(1-1+t) + ty^2(1-t) - 2t(1-t)xy \geq 0 \quad \forall t \in (0,1)$$

ovvero

$$t(1-t)(x-y)^2 \geq 0 \quad \forall t \in (0,1)$$ che è vera

Esempio $f = \operatorname{sen} x$ non è convessa su $[0, 2\pi]$

" " concava " "

dim

Voglio provare che f non è convessa: devo provare

$\exists x = \frac{\pi}{4}$ $y = \frac{\pi}{4}$ $\exists \bar{t}$: $f(x(\bar{t})) > (1-\bar{t})f(x) + \bar{t}f(y)$

$\frac{\pi}{2} = x(\bar{t}) = (1-\bar{t})\frac{\pi}{4} + \bar{t}\,\frac{7}{4}\pi$ se $\bar{t} = 1/6$ e si ha

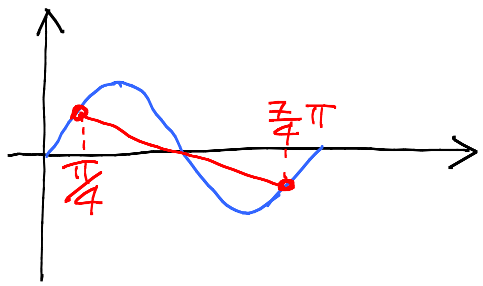
$$f(\pi/2) = f(x(1/6)) = 1 > \frac{\sqrt{2}}{3} = (1-1/6)f(\tfrac{\pi}{4}) + 1/6\, f(\tfrac{7}{4}\pi)$$
$$= 5/6\,\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{6}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Proviamo ora che f non è concava, cioè

$\exists\, x = \frac{\pi}{4}$ $\quad y = \frac{7}{4}\pi$ $\quad \exists\, \tilde{t} \in (0,1) : f(x(\tilde{t})) < (1-\tilde{t}) f(x) + \tilde{t} f(y)$

$\frac{3}{2}\pi = x(\tilde{t}) = (1-\tilde{t}) \cdot \frac{\pi}{4} + \tilde{t}\, \frac{7}{4}\pi$ se $\tilde{t} = 5/6$

$$f\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = f\left(x\left(\tfrac{5}{6}\right)\right) = -1 < -\frac{\sqrt{2}}{3} = \left(1-\tfrac{5}{6}\right) f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + \frac{5}{6} f\left(\tfrac{7}{4}\pi\right)$$
$$= \frac{1}{6}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{6}\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Nota Bene : $f(x) = \operatorname{sen} x$ è convessa su $[\pi, 2\pi]$
è concava su $[0, \pi]$

Teorema : $f: I \to \mathbb{R}$ $\quad I$ intervallo
Sono tra loro equivalenti

(i) $f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + t f(y) \quad t \in (0,1)$

(ii) $f(\omega) \leq \frac{y-\omega}{y-x} f(x) + \frac{\omega - x}{y-x} f(y) \quad \forall \omega \in (x,y)$

(iii) $f(\omega) \leq f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(\omega - x) \quad \forall \omega \in (x,y)$

Oss: si osservi che

$\frac{y-\omega}{y-x} + \frac{\omega-x}{y-x} = 1$ così come $(1-t)+t = 1$
$\forall \omega \in (x,y)$ $\qquad \forall t \in (0,1)$

dim

i) $\Rightarrow$ ii) $\quad f(\omega) = f\left(\frac{y-\omega}{y-x}\, x + \frac{\omega - x}{y-x}\, y\right)$

per la i)

prendo $t = \frac{\omega-x}{y-x}$ $\quad \leq \frac{y-\omega}{y-x} f(x) + \frac{\omega-x}{y-x} f(y) \quad \forall \omega \in (x,y)$

$1-t = \frac{y-\omega}{y-x}$

ii) $\Leftrightarrow$ iii) $\quad f(\omega) \leq \frac{y-\omega}{y-x} f(x) + \frac{\omega-x}{y-x} f(y)$

$$= \frac{f(x)(y-x+x-\omega) + f(y)(\omega-x)}{y-x}$$

$$= f(x) + \frac{f(y)(w-x) - f(x)(w-x)}{y-x}$$

$$= f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(w-x)$$

iii) $\Rightarrow$ i) preso $w = (1-t)x + ty$

$$f(w) \leq f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(w-x)$$

$$= f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\big((1-t)x + ty - x\big)$$

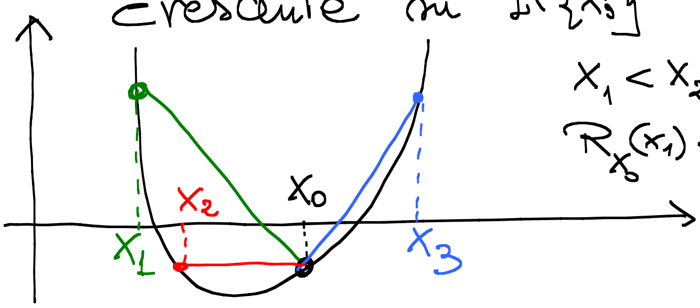
$$= f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{\cancel{y-x}_{\,1}} \cdot t\,(\cancel{y-x})^{1}$$

$$= (1-t)f(x) + t f(y) \qquad \checkmark$$

Oss: La convessità è un concetto "globale"
ovvero
non dipende dal punto ma dall'insieme

Continuità : concetto puntuale
Limite : " puntuale
Derivata : " puntuale
Monotonia : " globale
Lipschitzianità : " globale

Teorema (Fondamentale)
$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo. Sono equivalenti
i) f convessa su I (strettamente)
ii) $\forall x_0 \in I$ $R_{x_0}(x)$ è debolmente (strettamente) crescente su $I \setminus \{x_0\}$



$x_1 < x_2 < x_3$ e si ha
$R_{x_0}(x_1) < 0 = R_{x_0}(x_2) < R_{x_0}(x_3)$

Nel grafico si cerca di interpretare graficamente il risultato

dim (facoltativa)

i) $\Rightarrow$ ii)

Devo provare che, presi $x<y$, $R_{x_0}(x) \le R_{x_0}(y)$

Ora $R_{x_0}(y) - R_{x_0}(x) = \dfrac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} - \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$

ovvero $\dfrac{f(y)(x-x_0) - f(x_0)(x-x_0) - f(x)(y-x_0) + f(x_0)(y-x_0)}{(y-x_0)(x-x_0)} \ge 0$

ovvero $\dfrac{f(x_0)(y-x) - f(x)(y-x_0) - f(y)(x_0-x)}{(y-x_0)(x-x_0)} \ge 0$

1° caso $x<y<x_0$

essendo $(y-x_0)(x-x_0)>0$, devo provare che

$$(x_0-x)\left(f(x_0)\frac{y-x}{x_0-x} - f(x)\frac{y-x_0}{x_0-x} - f(y)\right) \ge 0$$

ovvero, essendo $x_0-x>0$, devo provare che

$$f(x_0)\frac{y-x}{x_0-x} + f(x)\frac{x_0-y}{x_0-x} - f(y) \ge 0$$

ma quest'ultima è vera, essendo vera la i)

2° caso $x<x_0<y$

Dobbiamo provare che

$$\frac{f(x_0)(y-x) - f(x)(y-x_0) - f(y)(x_0-x)}{(y-x_0)(x-x_0)} \ge 0$$

ma, essendo $(y-x_0)(x-x_0)<0$, dobbiamo provare

$$(y-x)\left(f(x_0) - f(x)\frac{y-x_0}{y-x} - f(y)\frac{x_0-x}{y-x}\right) \le 0$$

ed essendo $y-x>0$ devo provare

$$f(x_0) - f(x)\frac{y-x_0}{y-x} - f(y)\frac{x_0-x}{y-x} \le 0$$

e quest'ultima è vera poiché f convessa

e quindi $f(x_0) \le f(x)\dfrac{y-x_0}{y-x} + f(y)\dfrac{x_0-x}{y-x}$

3° caso $\quad x_0 < x < y$

Provare

$$\frac{f(x_0)(y-x) - f(x)(y-x_0) - f(y)(x_0-x)}{(y-x_0)(x-x_0)} \geq 0$$

essendo $(y-x_0)(x-x_0) > 0$, equivale a provare

$$(y-x_0)\left[f(x_0)\frac{y-x}{y-x_0} - f(x) + f(y)\frac{x-x_0}{y-x_0}\right] \geq 0$$

ed essendo $y-x_0 > 0$, equivale a provare

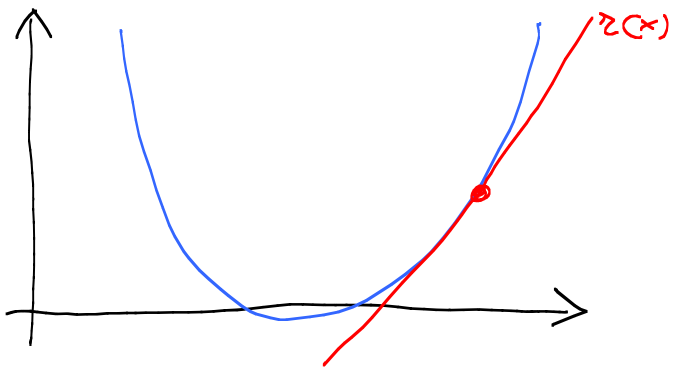
$$-f(x) + f(x_0)\frac{y-x}{y-x_0} + f(y)\frac{x-x_0}{y-x_0} \geq 0$$

e questo è vero poiché f convessa e quindi

$$f(x) \leq f(x_0)\frac{y-x}{y-x_0} + f(y)\frac{x-x_0}{y-x_0} \quad \text{è vera!}$$

Rileggendo a rovescio la dimostrazione che prova $i) \Rightarrow ii)$ ci dà la dimostrazione di $ii) \Rightarrow i)$

OSS: Presa f convessa su I intervallo comunque si prenda $\bar{x} \in I$ in cui f derivabile si ha che $r(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x})$ retta Tg. al grafico $(\bar{x}, f(\bar{x}))$, "separa" il piano in 2 regioni e il grafico sta Tutto in una delle due!!



Teorema $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile su I. Son tra loro equivalenti

i) f convessa su I

ii) $\forall x_1, x_2 \in I$ $\quad f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$

$\quad f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$

dim

i) $\Rightarrow$ ii)

$\boxed{1^\circ \text{ caso } x_1 < x_2}$ $x_1, x_2 \in I$, sappiamo che $R_{x_1}(x)$ è debolmente crescente su $I \setminus \{x_1\}$

Si ha dunque $R_{x_1}(x) \leq R_{x_1}(x_2)$ $\quad \forall x < x_2 \ . \ x \neq x_1$

Quindi si ha

$$\lim_{x \to x_1} R_{x_1}(x) = f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

da cui segue $f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$

$\boxed{2^\circ \text{ caso } x_2 < x_1}$ In questo caso si ha che $R_{x_2}(x)$ è debolmente crescente su $I \setminus \{x_2\}$ dunque

$$R_{x_1}(x_2) \leq R_{x_1}(x) \quad \forall x > x_2$$

Passando al limite per $x \to x_1$ si ha

$$R_{x_1}(x_2) \leq f'(x_1)$$

ovvero

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_1)$$ ed essendo $x_2 - x_1 < 0$

si ha $f(x_2) - f(x_1) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1)$

da cui segue $f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$

Nota: non è difficile provare $f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$

ii) $\Rightarrow$ i) presi $x, y \in I$ $x<y$ e $w \in]x, y[$

per la ii)

$$\begin{cases} f(x) \geq f(w) + f'(w)(x-w) \\ f(y) \geq f(w) + f'(w)(y-w) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} f(x) - f(w) \geq f'(w)(x-w) \\ f(y) - f(w) \geq f'(w)(y-w) \end{cases} \qquad \text{ma } x-w<0<y-w$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(x)-f(w)}{x-w} \leq f'(w) \leq \frac{f(y)-f(w)}{y-w}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(y)(x-w) - f(w)(x-w) - f(x)(y-w) + f(w)(y-w)}{(x-w)(y-w)} \geq 0$$

ma $(x-w)(y-w) < 0$,

$$\Downarrow$$

$$f(w)(y-x) - f(x)(y-w) - f(y)(w-x) \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$(y-x)\left[f(w) - f(x)\frac{y-w}{y-x} - f(y)\frac{w-x}{y-x}\right] \leq 0$$

ma $y-x>0$

$$\Downarrow$$

$$f(w) \leq f(x)\frac{y-w}{y-x} + f(y)\frac{w-x}{y-x}$$

ovvero f è convessa

Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo

Se f convessa su I allora f continua su $\mathring{I}$

N.B. $f(x) = \begin{cases} 3 & x=-1 \\ x^2 & -1<x<1 \\ 2 & x=1 \end{cases}$ è convessa su $[-1, 1]$

ma è continua su $]-1, 1[$

Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile

Sono tra loro equivalenti

i) f convessa su I (strettamente)

ii) f' è debolmente (strettamente) crescente su I

dim

i) $\Rightarrow$ ii) Presi $x<y$ devo provare $f'(x) \leq f'(y)$

Per ipotesi

$$\begin{cases} f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y) \\ f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} f(x) - f(y) \geq f'(y)(x-y) \\ f(y) - f(x) \geq f'(x)(y-x) \end{cases}$$ ma $x-y<0<y-x$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'(y) \\ \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq f'(x) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(y) \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq f'(x)$$

ii) $\Rightarrow$ i) Presi $x<y$ si ha $f'(x) \leq f'(y)$

Per il Teorema di Lagrange $\exists\, z \in (x,y)$ t.c.

$$f'(x) \leq f'(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} f(y) - f(x) \leq f'(y)(y-x) \\ f(y) - f(x) \geq f'(x)(y-x) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y) \\ f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x) \end{cases}$$