

Def: Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f si dice Lipschitziana di costante L se $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]$

ESERCIZI:

1) Sia f Lipschitz su $[a, b]$, allora f continua $\forall x \in [a, b]$

Dimo: Fissato $\varepsilon > 0$ scelgo $\delta < \frac{\varepsilon}{L}$, infatti se $x, y \in [a, b]$ t.c.

$|x - y| < \delta$ allora $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta < \varepsilon$

2) Sia f derivabile con f' continua su $[a, b]$, allora f è Lipschitziana

Dimo: $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(\xi)| \leq M \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 tlem Lagrange $\xi \in [a, b]$ $\forall x, y \in [a, b]$

3) Sia f derivabile in x_0 e Lipschitziana su $[a, b]$ di costante L
 Allora $|f'(x_0)| \leq L$

Dimo: P.A. sia $f'(x_0) < -L$ oppure $f'(x_0) > L$.

Considero $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L = f'(x_0) - L$

Se $f'(x_0) > L$, allora $f'(x_0) - L > 0$ e per la permanenza del segno $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > L$ ①

Se $f'(x_0) < -L$, allora considero $\lim_{x \rightarrow x_0} -\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L = -f'(x_0) - L$
 e per la permanenza del segno ottengo $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < -L$ ②

Da ① e ② segue l'assunto, poiché f è Lipschitziana su $[a, b]$.

TEOREMA: Sia f derivabile in $x_0 \in [a, b]$ e x_0 sia pto di massimo locale o minimo locale di f . Allora $f'(x_0) = 0$.

TEOREMA: Sia f continua su $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora valgono:

- 1) $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0 \iff f$ è crescente su (a, b)
- 2) $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) \leq 0 \iff f$ è decrescente su (a, b)

TEOREMA: Sia f continua su $[a, b]$ e derivabile 2 volte con f', f'' continue su $[a, b]$ e sia x_0 t.c. $f'(x_0) = 0$. Allora

- 1) Se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un pto di massimo
- 2) Se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un pto di minimo

N.B. Se $f''(x_0) = 0$ non posso dire nulla a meno che f non sia derivabile una terza volta e $f'''(x_0) \neq 0$.

In quel caso: x_0 è di flesso a tg. orizzontale.

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3x \quad f(x) = k \quad \text{quante soluzioni al variare di } k \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Devo studiare la funzione

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 10x - 3, \quad f'(x) \geq 0 ?$$

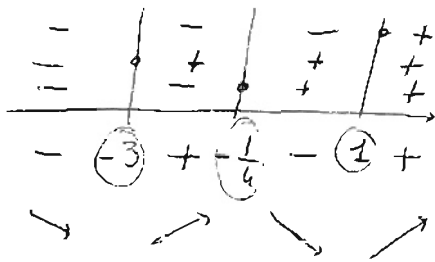
$$f'(x) = (x-1)(4x^2 + 13x + 3)$$

$$f''(x) = 12x^2 + 18x - 10$$

	4	9	-10	-3
1		4	13	3
	4	13	5	0

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 48}}{8} = \frac{-13 \pm 11}{8} \quad \begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = -\frac{1}{4} \end{matrix}$$

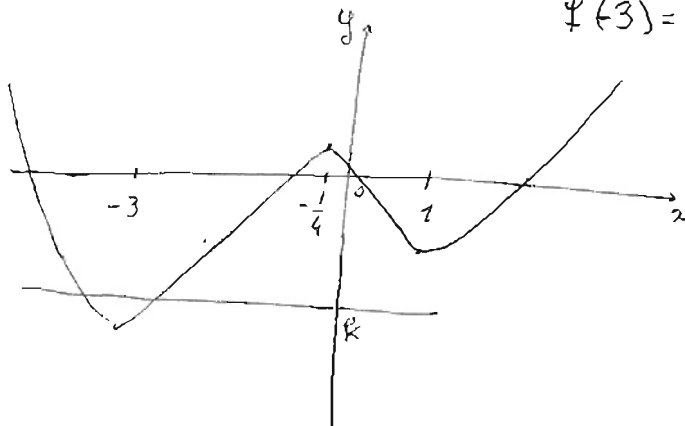
$$f'(x) = (x-1) \cdot 4 \left(x + \frac{1}{4}\right) (x+3) \geq 0$$



$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{256} - 3 \cdot \frac{1}{64} - 5 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 - 12 - 80 + 192}{256} = \frac{101}{256} \quad \text{massimo locale}$$

$$f(1) = 1 + 3 - 5 - 3 = -4 \quad \text{minimo locale}$$

$$f(3) = 81 - 81 - 45 + 9 = -36 \quad \text{minimo locale}$$



$$k < -36 \quad 0 \text{ soluzioni}; \quad k = -36 \quad 1 \text{ sol.}$$

$$-36 < k < -4 \quad 2 \text{ soluzioni}$$

$$k = -4 \quad 3 \text{ soluzioni}$$

$$-4 < k < \frac{101}{256} \quad 4 \text{ soluzioni}$$

$$k = \frac{101}{256} \quad 3 \text{ soluzioni}$$

$$k > \frac{101}{256} \quad 2 \text{ soluzioni}$$

NB.

$$f''(-3) = 12 \cdot 9 - 18 \cdot 3 - 10 = 108 - 64 = 44 > 0$$

$$f''\left(-\frac{1}{4}\right) = 12 \cdot \frac{1}{16} - \frac{18}{4} - 10 = \frac{3 - 18 - 40}{4} = -\frac{55}{4} < 0 \quad \begin{matrix} \text{pto di} \\ \text{minimo} \\ \text{pto di} \\ \text{max} \end{matrix}$$

$$f''(1) = 12 + 18 - 10 = 20 > 0 \quad \text{pto di minimo.}$$

$$\frac{x + \log(\cos x) - \operatorname{arctan}(\log(1+x))}{x - \operatorname{arctan} x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} ?$$

Utvikling $\log(1+x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x - x^2}{(1+x)2x} = -\frac{1}{2} \quad \text{over } \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 1 - x + x^2}{(1+x)3x^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{over } \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \log(\cos x) - \operatorname{arctan}(\log(1+x))}{x - \operatorname{arctan} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)}{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\ \operatorname{arctan} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{array} \right] = \frac{\operatorname{arctan}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$= \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^3) - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{1}{6} x^3}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = -1$$

ESERCIZIO:

Approssimare $\sec \frac{1}{2}$ con $P_3\left(\frac{1}{2}\right)$ e dire qual è l'errore commesso

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6} \quad R_4(x) = \frac{\cos(x)}{5!} x^5$$

NB. Sto usando $x_0 = 0$.

$$P_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{23}{48} = 0,4791\bar{6}$$

$$\text{Errore: } \left| \sec \frac{1}{2} - P_3\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| R_4\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{\cos(x)}{5!} \cdot \frac{1}{32} \right|$$

$$\leq \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{120} = 0,00026$$

$P_3\left(\frac{1}{2}\right)$ è esatto almeno alle prime 3 cifre decimali.

$$\text{Infatti } \sec \frac{1}{2} = 0,479426$$

ESERCIZIO: Studiare la funzione: $f(x) = x e^{-2/x}$

• Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

• Limiti: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{-2/x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-2/x}}{1/x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2/x^2 e^{-2/x}}{-1/x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-2/x} = 0$$

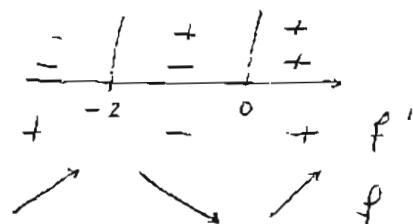
• Positività: $x e^{-2/x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ (0 non è nel dominio)

• Derivata prima:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{-2/x} \quad x \neq 0$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} \geq 0 \quad \begin{matrix} x+2 \geq 0 \\ x > 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow f(-2) = -2e \quad \text{massimo locale}$$



• Asintoto obliquo: $y = mx + q$ (se esiste)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2/x} = 1 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-2/x} - x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2/x} - 1}{1/x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2/x^2 e^{-2/x}}{-1/x^2} = -2 = q$$

$$\Rightarrow \text{l'asintoto obliquo esiste ed è } y = x - 2$$

• Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{4}{x^3} e^{-2/x}$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x > 0$$

• Grafico:

