

Def $f;]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in]a, b[= (a, b)$

Un polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ si dice
 "Polinomio di Taylor relativo a f di ordine n
 centrato in x_0 " se

$$f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n) \quad x \rightarrow x_0$$

Oss: $\sqrt{2} = 1,414 + (\text{Termini di ordine inferiore})$
 $\approx 1/1000$

Teorema (Unicità)

Se $P_n(x)$ esiste allora è unico
 cioè

Per assurdo $\exists P_n(x) \neq Q_n(x)$ t.c.

$$f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n)$$

$$f(x) - Q_n(x) = o((x-x_0)^n) \quad x \rightarrow x_0$$

$\Downarrow$

$$(*) Q_n(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n) \quad x \rightarrow x_0$$

$$Q_n(x) - P_n(x) = (b_n - a_n)(x-x_0)^n + (b_{n-1} - a_{n-1})(x-x_0)^{n-1} + \dots + (b_1 - a_1)(x-x_0) + (b_0 - a_0)$$

$$Q_n(x_0) - P_n(x_0) = b_0 - a_0 = 0 \Rightarrow b_0 = a_0$$

$$Q_n(x) - P_n(x) = (x-x_0) \left[(b_n - a_n)(x-x_0)^{n-1} + \dots + (b_1 - a_1) \right]$$

$$\Downarrow \quad o((x-x_0)^n)$$

$$(b_n - a_n)(x-x_0)^{n-1} + \dots + (b_1 - a_1) = o((x-x_0)^{n-1})$$

pongo $x = x_0$ e l'uguaglianza precedente diventa

$$b_1 - a_1 = 0 \Rightarrow b_1 = a_1$$

Dopo un n.ro finito di passi ($n+1$ passi)
 ho l'orologio in questo $T_n = Q_n$ ✓

Teorema (Formule di Taylor con Resto di Peano)

$f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$

(i) f derivabile $(n-1)$ volte in $]a, b[$

(ii) " " " " " " x_0

Possò
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k,$$

Allora
$$f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n) \quad x \rightarrow x_0$$

Oss: quando $n=1$ la formula si riduce a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad x \rightarrow x_0$$

Oss: $o(f) = f \cdot o(1) \quad x \rightarrow x_0$ dove
 $o(1) = \{ \text{l'insieme delle funzioni infinitesime per } x \rightarrow x_0 \}$

dim
 (Si fa uso del Teorema dell'Hôpital)

$$\S \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

$$f(x_0) = P_n(x_0) \quad P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$f'(x_0) = P'_n(x_0) \quad P'_n(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x_0) = P''_n(x_0) \quad P''_n(x) = f''(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}$$

$$f^{(n-1)}(x_0) = P^{(n-1)}_n(x_0) \quad P^{(n-1)}_n(x) = f^{(n-1)}(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{1!}(x-x_0)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} &\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - P_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \stackrel{(H)}{=} \dots \\
&\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - P_n^{(n-1)}(x)}{n! (x-x_0)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n! (x-x_0)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n! (x-x_0)} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \\
&= \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) = 0
\end{aligned}$$

Esercizio: Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 relativo a

$$f(x) = 3x - x^2 + x^4 - x^5$$

- centrato in $x_0 = 0$
- " " $x_0 = 1$

dim

$x_0 = 0$ $f(x) = 3x - x^2 + x^4 + o(x^4) \quad x \rightarrow 0$
 poiché $x^5 = o(x^4) \quad x \rightarrow 0$

$$P_4(x) = 3x - x^2 + x^4$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = 3 - 2x + 4x^3 - 5x^4$$

$$f''(x) = -2 + 12x^2 - 20x^3$$

$$f'''(x) = 24x - 60x^2$$

$$f^{(iv)}(x) = 24 - 120x$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 3$$

$$f''(0) = -2$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{(iv)}(0) = 24$$

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k = 3 \cdot x - \frac{2}{2!} \cdot x^2 + \frac{24}{4!} x^4$$

$$f(x) = 3x - x^2 + x^4 - x^5$$

$$f'(x) = 3 - 2x + 4x^3 - 5x^4$$

$$f''(x) = -2 + 12x^2 - 20x^3$$

$$f'''(x) = 24x - 60x^2$$

$$f^{(4)}(x) = 24 - 120x$$

$$= 3x - x^2 + x^4$$

$$f(1) = 2$$

$$f'(1) = 3 - 2 + 4 - 5 = 0$$

$$f''(1) = -2 + 12 - 20 = -10$$

$$f'''(1) = -36$$

$$f^{(4)}(1) = -96$$

$$P_4(x) = 2 - \frac{10}{2!} (x-1)^2 - \frac{36}{3!} (x-1)^3 - \frac{96}{4!} (x-1)^4$$

centro in $x=1$

Esempio calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x}$
dire

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = +\infty \quad (= 1/0^+)$$

Se applicassi l'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{1} = 0$$

(H)

$$\textcircled{1} \Rightarrow: \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad x \rightarrow 0$$

$$\underline{\text{ma}} \quad |\sin x| \leq 1 \quad \forall x$$

mentre

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(x - \frac{x^3}{6} \right) = +\infty \quad \inf_{x \in \mathbb{R}} \left(x - \frac{x^3}{6} \right) = -\infty$$

Teorema (formule Taylor con Resto di Lagrange)

$f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in]a, b[$

$\bullet f$ derivabile $(n+1)$ volte in $]a, b[$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

$\Rightarrow \exists z \in]a, b[$ compreso tra x e x_0 tale che

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

dim
(si usa il Teorema di Cauchy)

$$\exists z : \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}$$

$$g(t) = f(t) - P_n(t)$$

$$h(t) = (t-x_0)^{n+1}$$

$$g(x_0) = h(x_0) = 0$$

$$g'(x_0) = h'(x_0) = 0$$

$$g^{(n)}(x_0) = h^{(n)}(x_0) = 0$$

vedi il Teorema precedente

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{h(x) - h(x_0)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{h(x) - h(x_0)}$$

Applico Cauchy
a g, h null's

$$\downarrow \begin{matrix} [x_0, x] \\ [x, x_0] \end{matrix}$$

$$\exists z_1 : \frac{g(x) - g(x_0)}{h(x) - h(x_0)} = \frac{g'(z_1)}{h'(z_1)} \quad \text{ove } z_1 \text{ compreso tra } x \text{ e } x_0$$

$$= \frac{g'(z_1) - g'(x_0)}{h'(z_1) - h'(x_0)}$$

↑ applico il Teorema di Cauchy
a g', h' su $[z_1, x_0]$ ($[x_0, z_1]$)

$\exists z_2$ compreso tra x_0 e z_1 tale che

$$\frac{g'(z_1) - g'(x_0)}{h'(z_1) - h'(x_0)} = \frac{g''(z_2)}{h''(z_2)} =$$

$$= \dots = \frac{g^{(n+1)}(z_{n+1})}{h^{(n+1)}(z_{n+1})} \quad \text{dove } z_{n+1} \text{ è compreso tra } z_n \text{ e } x_0$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(z_{n+1})}{(n+1)!}$$

Esercizio Quale errore commetto nel sostituire a $\sqrt{65}$ il numero

$$8 \left(1 + \frac{1}{128} \right) ?$$

dice

$$\sqrt{65} = \sqrt{1+64} = 8 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{64}} = 8 \cdot \left(1 + \frac{1}{64} \right)^{1/2}$$

$$= 8 \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{64} + \text{"Resto"} \right)$$

$$f = (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} x^4 + \dots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-m+1)}{m!} x^m + \frac{f^{(m+1)}(z)}{(m+1)!} x^{m+1}$$

$$\alpha = 1/2$$

$$f\left(\frac{1}{64}\right) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64} + \frac{f''(z)}{2} \cdot \left[\frac{1}{64} \right]^2$$

$$\left| f\left(\frac{1}{64}\right) - \left(1 + \frac{1}{128} \right) \right| = \left| f''(z) \right| \frac{1}{2 \cdot 64} \leq \sup_{z \in [1/64]} \left| f''(z) \right| \cdot \frac{1}{2 \cdot 64}$$

$$f(x) = (1+x)^\alpha \quad f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1} \quad f'' = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+x)^{3/2}}$$

$$\sup_{x \in [0, 1/64]} |f''(x)| = \sup_{x \in [0, 1/64]} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+x)^{3/2}} = \frac{1}{4}$$

Ne segue che

$$|f(1/64) - (1 + 1/128)| \leq \frac{1}{8^5}$$

da cui

$$|\sqrt{65} - 8 \cdot (1 + 1/128)| \leq 1/8^4$$

Esercizio (Funzioni Lipschitziane)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice L -Lipschitziana se

$$\exists L > 0 : \forall x, y \in [a, b] \quad |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

1) Provare che f L -Lipschitziana

$$\Rightarrow f \text{ continua } \forall x \in [a, b]$$

2) Provare che f derivabile con f' continua su $[a, b]$

$$\Rightarrow f \text{ è } L\text{-Lipschitziana su } [a, b]$$

3) Provare che f derivabile in $x_0 \in [a, b]$ e

$$f \text{ } L\text{-Lipschitziana} \Rightarrow |f'(x_0)| \leq L \quad \checkmark$$

Esercizio : Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ α -Hölderiana su $[a, b]$

$$\text{ovvero } \exists C > 0 \exists \alpha \in (0, 1) : |f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha$$

se f è α -Hölderiana su $[a, b]$ con $\alpha > 1$

allora f è costante $\checkmark$