Analisi Matematica 1 Lunedì 3 marzo 2014

f derivabile in x_0 p.d.a. per A $\quad f: A \to \mathbb{R}$ se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = Df(x_0) \in \mathbb{R}$$

Oss • f derivabile in x_0 allora "$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$"
$x \to x_0$

• f derivabile in x_0 allora f è continua in x_0

• " " " " allora esiste $r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

infatti si ha $f(x) = r(x) + o(x - x_0) \quad x \to x_0$

• f continua $\not\Rightarrow$ f derivabile $\left(\begin{array}{l} f(x) = |x| \\ \text{in } x_0 = 0 \end{array} \right)$

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$ quando f e g sono derivabili in x_0

dim

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \right] \cdot$$
$$\cdot \left[g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \right]$$

$$= f(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{f(x_0) \cdot o(x - x_0)}_{= o(x - x_0)} +$$
$$+ f'(x_0)(x - x_0) \cdot g(x_0) + \underbrace{f'(x_0) g'(x_0)(x - x_0)^2}_{= o(x - x_0)} + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0) \cdot o(x - x_0)}_{= o(x - x_0)} +$$

$$\underbrace{+g(x_0)\cdot o(x-x_0)}_{o(x-x_0)=} + \underbrace{g'(x_0)(x-x_0)\,o(x-x_0)}_{=o(x-x_0)} + \underbrace{o(x-x_0)\,o(x-x_0)}_{o(x-x_0)}$$

$$f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + \left[f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)\right](x-x_0) + o(x-x_0)$$

f derivabile in x_0
g " " $f(x_0)=y_0$ $\Rightarrow (g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

① $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

$y=f(x)$

② $g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\cdot(f(x)-f(x_0)) + o(f(x)-f(x_0))$ $\quad x\to x_0$

Infatti, $\underbrace{x\to x_0 \Rightarrow f(x)\to f(x_0)}_{\text{continuità di } f \text{ in } x_0}$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\left(f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)\right)$$
$$+\, o\left(\underbrace{f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)}\right)$$
$$= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\,f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

f derivabile in $x_0\in I$
f strettamente crescente (decrescente)
su I intervallo
$\Rightarrow \exists\ (f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

dim (facoltativa)

Posto $g(y) = f^{-1}(y)$ $\quad f$ è derivabile in $x_0 = g(y_0) = f^{-1}(y_0)$ e

$$f(g(y)) - f(g(y_0)) = f'(g(y_0))\cdot(g(y)-g(y_0)) + o(|g(y)-g(y_0)|) \quad y\to y_0$$

$(f\circ g)(y)=y$ $\quad\Downarrow$

$$y - y_0 = f'(g(y_0))\cdot(g(y)-g(y_0)) + o(|g(y)-x_0|) \quad y\to y_0$$

$\Downarrow$

$$o(|y-y_0|) = o\left(f'(g(y_0))(g(y)-g(y_0)) + o(|g(y)-x_0|)\right) = o(|g(y)-x_0|) \quad y\to y_0$$

$\Downarrow$

$$y-y_0 = f'(g(y_0))\cdot\left(g(y)-x_0\right) + o\left(|y-y_0|\right) \qquad y\to y_0$$

$$\Downarrow$$

$$y-y_0+o\left(|y-y_0|\right) = f'(x_0)\left(g(y)-x_0\right) \qquad \text{per } y\to y_0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{f'(x_0)}(y-y_0) + o\left(|y-y_0|\right) = g(y)-\overset{g(y_0)}{x_0} \qquad \text{per } y\to y_0$$

$$\Downarrow$$

$$g(y) = g(y_0) + \frac{1}{f'(x_0)}(y-y_0) + o\left(|y-y_0|\right) \qquad \text{per } y\to y_0$$

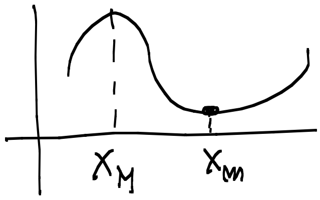
cioè la Tesi

Oss: $f'(x_0)>0 \Rightarrow f$ localmente crescente strettamente

$$\not\Leftarrow$$

Def $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathring{A}$ $\left(\text{ovvero } \exists \delta>0 : \,]x_0-\delta, x_0+\delta[\, \subseteq A\right)$

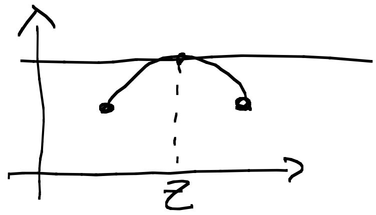
x_0 p.to max locale interno se $\exists \delta>0 : \forall x \in \,]x_0-\delta, x_0+\delta[\, \subseteq A$ $\quad f(x) \le f(x_0)$
x_0 " min " " se " " $\quad f(x) \ge f(x_0)$



Lemma (di Fermat) $\quad f: I \to \mathbb{R}$ $\quad I$ intervallo
f derivabile su I
$x_0 \in I$ punto di max (min) locale interno

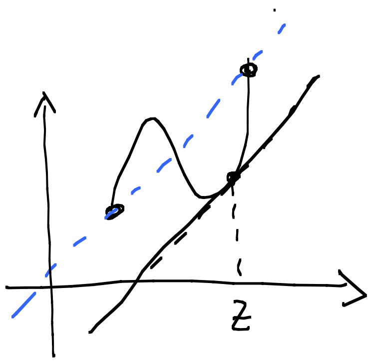
Allora $f'(x_0) = 0$

Teorema (Rolle)
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$



- f continua in $[a,b]$
- f derivabile in $]a,b[$
- $f(a) = f(b)$

$\Longrightarrow \exists z \in \,]a,b[\, : f'(z) = 0$



Teorema (Rolle)
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

- f continua in $[a,b]$
- f derivabile in $]a,b[$

$\Longrightarrow \exists z \in \,]a,b[\, : f'(z) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Teorema (Cauchy)

$f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$

- f,g continue su $[a,b]$
- f,g derivabili su $]a,b[$
- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

$\Rightarrow \exists z \in]a,b[: \dfrac{f'(z)}{g'(z)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

dim

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[\quad \Rightarrow \quad \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(z)^{\neq 0} \quad z \in]a,b[$

$\Rightarrow \quad g(b) \neq g(a)$

- $f'(z)\big(g(b)-g(a)\big) - g'(z)\big(f(b)-f(a)\big) = 0$

Introduco
- $h(x) = f(x)\big(g(b)-g(a)\big) - g(x)\big(f(b)-f(a)\big)$

$h(x)$ continua su $[a,b]$
" derivabile " $]a,b[$ $\Rightarrow \exists z \in]a,b[:$
$h(a) = h(b)$ $\qquad h'(z) = 0$

cioè la Tesi

$h(a) = f(a)g(b) - \cancel{f(a)g(a)} - g(a)f(b) + \cancel{g(a)f(a)}$

$h(b) = \cancel{f(b)g(b)} - f(b)g(a) - \cancel{g(b)f(b)} + g(b)f(a)$

Oss: Lagrange si ottiene da Cauchy prendendo $g(x) = x$

"Cauchy $\Rightarrow$ Hôpital $\Rightarrow$ Taylor con resto Peano"

Teorema (dell'Hôpital) 0/0

$f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$

- derivabili su $]a,b[$
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$
- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$
- $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

dim

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in]a,b[\\ 0 & x = a \end{cases} \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \in]a,b[\\ 0 & x = a \end{cases}$$

per costruzione $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ sono continue su $[a,b[$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{(\tilde{f})'(z)}{(\tilde{g})'(z)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Teorema di Cauchy

dove $a < z < x$

Infatti $\tilde{f}, \tilde{g}$ sono continue su $[a,x]$

" derivabili su $]a,x[$

$\Rightarrow$ vale la Tesi del Teorema di Cauchy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z_x)}{g'(z_x)} \qquad a < z_x < x$$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(z_x)}{g'(z_x)} = \lim_{z \to a^+} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \ell$$

Teorema (dell'Hôpital) ∞/∞

$f, g:]a,b[\to \mathbb{R}$

- derivabili su $]a,b[$
- $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$
- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$
- $\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

dim (facoltativa)

$\ell \in \mathbb{R}$ Per ipotesi si ha

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta_1>0 : \forall x \in]a, a+\delta_1[\quad \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \varepsilon$

f e g soddisfano il Teorema di Cauchy su $[x, a+\delta_1]$ e quindi

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1-\frac{f(a+\delta_1)}{f(x)}}{1-\frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}} = \frac{f(x)-f(a+\delta_1)}{g(x)-g(a+\delta_1)} \underset{\text{Cauchy}}{=} \frac{f'(t(x))}{g'(t(x))} \qquad x<t(x)<a+\delta_1$$

posto $\varphi(x) = \left[\frac{1-\frac{f(a+\delta_1)}{f(x)}}{1-\frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}}\right]^{-1}$ si ha $\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x)\frac{f'(t(x))}{g'(t(x))}$

con $\lim_{x\to a^+} \varphi(x) = 1$ da cui segue

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta_2>0 \quad 0<\delta_2<\delta_1 \qquad x \in]a, a+\delta_2[\Rightarrow \begin{cases} |\varphi(x)-1| < \varepsilon \\ |\varphi(x)| \le 2 \end{cases}$$

ne segue, per $x \in]a, a+\delta_2[$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| = \left|\varphi(x)\frac{f'(t(x))}{g'(t(x))} - \varphi(x)\cdot\ell + \varphi(x)\ell - \ell\right|$$

$$\le |\varphi(x)| \cdot \left|\frac{f'(t(x))}{g'(t(x))} - \ell\right| + |\varphi(x)-1| \cdot |\ell|$$

$$\underset{a<x<a+\delta_2}{\le} (2+|\ell|)\cdot\varepsilon \qquad \text{e dunque}$$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta_2 \in (0,\delta_1) : x \in]a, a+\delta_2[\quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| < \varepsilon$

ovvero $f(x)/g(x) \longrightarrow \ell$ per $x \to a^+$; la Tesi

Attenzione all'uso indiscriminato del Thm Hôpital

Esempio 1 : Calcolare $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(\log^2(1+x)\right)}{\log\left(1+\operatorname{arctg}^2 x\right)}$

Provare ad applicare l'Hôpital
Non è sbagliato usarlo, ma provate

Esempio 2 Calcolare $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 3\operatorname{sen} x}{2x}$

dim

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3 - 3\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{2} = 3/2$$

però, se inizio con l'Hôpital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x - 3\operatorname{sen} x}{2x} \cancel{\underset{(H)}{=} \lim_{x \to +\infty}} \frac{3 - 3\cos x}{2}$$

non esiste !

NON POSSO UTILIZZARE L'HÔPITAL

PERCHÉ $\nexists \lim_{x\to+\infty} \frac{f'}{g'}$ $\checkmark$

Teorema (Corollario Hôpital)

$f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathring{A}$ f derivabile in $A \setminus \{x_0\}$

$\exists \lim_{x\to x_0^-} f'(x_0) = \alpha_-$ $\exists \lim_{x\to x_0^+} f'(x_0) = \alpha_+$

Allora i) $\alpha_- = f'_-(x_0)$ $\alpha_+ = f'_+(x_0)$

ii) $\alpha_- = \alpha_+ \Rightarrow \exists f'(x_0) = \alpha_- = \alpha_+$

dim

i) $f'_-(x_0) \underset{\text{Def.}}{=} \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \alpha_-$

$f'_+(x_0) \overset{\text{Def.}}{=} \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \alpha_+$

ii) immediata dalla i) $\checkmark$

<u>Esercizio</u> Determinare $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) = \begin{cases} (a-1)x + b - a & x>0 \\ 3 & x=0 \\ cx - x^2 - 3b & x<0 \end{cases}$$

sia derivabile su $\mathbb{R}$

dim

se $x \neq 0$ allora f è derivabile $\forall a, b, c$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -3b = 3 = b - a = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$\begin{cases} b-a=3 \\ 3b=-3 \end{cases}$

$\boxed{\begin{cases} b=-1 \\ a=-4 \end{cases}}$

$$f'(x) = \begin{cases} a-1 & x>0 \\ c-2x & x<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = c = a-1 = \lim_{x\to 0^+} f'(x) \qquad c = a-1$$

$$\boxed{c=-5}$$

$$\Downarrow$$

Polinomi di Taylor

Esempio $\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x} = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x-x^2/2}{x^3} \underset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{3x^2} \underset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{6x} = 1/6$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}}{x^4} = = = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{24x} = \frac{1}{24}$$

- - - - -

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}{x^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}{x^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Teorema (Formula di Taylor con resto di Peano)

$f:]a,b[\to \mathbb{R} \qquad x_0 \in]a,b[$

f derivabile $(n-1)$ volte in $]a,b[$

f " n volte in x_0

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-x_0)^k$$

Allora $\quad f(x) - P_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \quad x \to x_0$

<u>Def</u> Data $f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$

$P_n(x)$ polinomio di grado $\leq n$ si dice

"Polinomio di Taylor di ordine n relativo a f centrato in x_0"

<u>se</u> $\quad f(x) - P_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \quad x \to x_0$