

Esercitazione 4 - Analisi Matematica 1 - 16 gennaio 2014

Esercizio: Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$

→ Dominio = $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x^3 \geq 0\}$
si ha

$$x^2(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x$$

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} =]-\infty, 1]$$

→ limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0^+$$

→ Intersezioni con gli assi $\begin{cases} f(x) = y \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0) \text{ e } (1,0)$

→ Segno: $f(x) > 0 \quad \forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$

→ Studio delle regioni di monotonia

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x^3}} \cdot (2x - 3x^2) = 0 \quad \text{dunque } x \neq 0, 1$$

$$(\Leftrightarrow) 2x - 3x^2 = x(2 - 3x) = 0$$

$$(\Leftrightarrow) x = \frac{2}{3}$$

$$f' \begin{cases} > 0 & 0 < x < \frac{2}{3} \\ < 0 & \frac{2}{3} < x < 1 \end{cases} \Rightarrow f' \begin{cases} \nearrow & 0 < x < \frac{2}{3} \\ \searrow & \frac{2}{3} < x \end{cases}$$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$ punto di max relativo interno

Inoltre

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in]-\infty, 0[$$

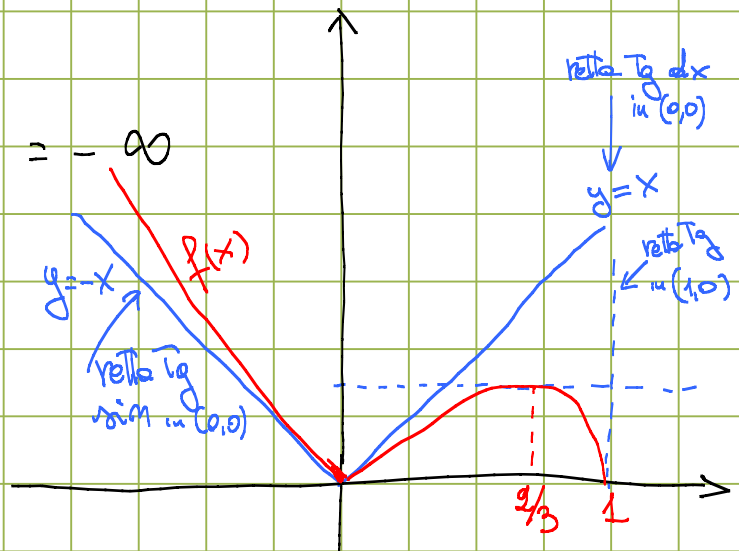
→ Limiti agli estremi del dominio di f'

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2 - x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x(1 - \frac{3}{2}x)}{x \cdot 2\sqrt{1-x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x(1 - \frac{3}{2}x)}{-2x\sqrt{1-x}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2 - x^3}} = -\infty$$



Esercizio $f''(x) \begin{cases} > 0 & x < 0 \\ < 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$ (da verificare)

Esercizio: Determinare il numero di radici dell'equazione $2x^3 - 9x^2 + 12x - 1 = 0$ dim

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

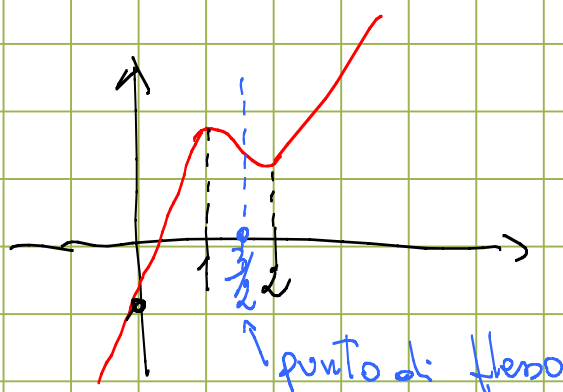
Newton-Raphson $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 0$

$$f' = 0 \text{ se } (x-2)(x-1) = 0 \text{ se } x_1 = 1 \text{ o } x_2 = 2$$

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & x < 1 \\ < 0 & 1 < x < 2 \\ > 0 & 2 < x \end{cases} \Rightarrow f \begin{cases} \nearrow & x < 1 \\ \searrow & 1 < x < 2 \\ \nearrow & 2 < x \end{cases}$$

$$x=1 \text{ è max relativo interno} \quad f(1) = 2 - 9 + 12 - 1 = 4 > 0$$

$$x=2 \text{ è min " " " " } \quad f(2) = 16 - 36 + 24 - 1 = 3 > 0$$



$$f''(x) = 12x - 18 = 6(x-3) = 0 \text{ per } x = 3/2$$

$$f(x) = 0 \text{ ha 1 sola soluzione reale } \bar{x} \in]0, 1[\downarrow$$

Esercizio Provare che $\forall x, y \geq 0 \quad \forall p, q > 1$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\text{si ha } xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

dim.

$$p=2 \text{ e } q=2 \quad xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

Questa disuguaglianza dipende da x e da y

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$$

che dipende dai
parametri y, p, q

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{y^q}{q}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot x^{p-1} - y = 0 \Leftrightarrow x^{p-1} = y \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{p-1}}$$

$$f = x^{p-1} - y \begin{cases} < 0 & 0 < x < y^{\frac{1}{p-1}} \\ > 0 & y^{\frac{1}{p-1}} < x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy \geq f(y^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1}{p-1}} \cdot y \\ &= \frac{1}{p} y^{\frac{p}{p-1}} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \\ &= \frac{y^q}{q} - \frac{1}{q} y^{\frac{p}{p-1}} = \frac{y^q}{q} - \frac{y^q}{q} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy \geq 0 \quad \checkmark$$

Esercizio Prova che

$$① (y+x)^p \geq y^p + x^p \quad \forall y, x > 0 \quad \forall p \geq 1$$

$$② (x+y)^p \leq 2^{p-1} (x^p + y^p) \quad // \quad //$$

dire

$$(y+x)^p \geq y^p + x^p$$

essendo $x > 0$ posso dividere tutto per x^p e ponendo $t = \frac{y}{x}$ si ottiene

$$(t+1)^p \geq t^p + 1$$

① diretta $(t+1)^p \geq t^p \quad \forall t \geq 0 \quad \forall p > 1$
 il che equivale a

$$\boxed{\frac{(t+1)^p}{t^p} \geq 1 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall p > 1}$$

A questo punto studio

$$f(t) = \frac{(t+1)^p}{t^p} : \text{mi ha } \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1 \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$$

la funzione in $t=2$ mi dà $f(2) = \frac{3^p}{1+2^p} > 1$
 e dunque, per il corollario del Teorema di Weierstrass,
 esiste $\max f([0, +\infty[)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{p(t+1)^{p-1}(t^p) - p t^{p-1}(t+1)^p}{(t^p+1)^2} = \frac{(t+1)^{p-1}}{(t^p+1)^2} \left[\cancel{p t^p} - \cancel{p t^{p-1}} \right] \\ &= \frac{(t+1)^{p-1}}{(t^p+1)^2} \cdot p \left(1 - t^{p-1} \right) = 0 \end{aligned}$$

Ne $t=1$

Ne segue che la funzione ha 1 solo punto stazionario
 in $t=1$ ed essendo

$$f' \begin{cases} > 0 & 0 < t < 1 \\ < 0 & 1 < t \end{cases} \Rightarrow f \begin{cases} \nearrow & 0 < t < 1 \\ \searrow & 1 < t \end{cases} \Rightarrow t=1 \text{ punto di max relativo}$$

Essendo l'unico, mi ha $f(1) = \frac{(1+1)^p}{1+1^p} = 2^{p-1} = \max f([0, +\infty[)$

Infine $f(0) = \min f([0, +\infty[) = 1$ e dunque

$$1 \leq f(t) \leq 2^{p-1} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall p > 1 \text{ da cui}$$

$$1 \leq \frac{(t+1)^p}{t^p} \leq 2^{p-1} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall p > 1 \text{ da cui}$$

$$t^p+1 \leq (t+1)^p \leq 2^{p-1}(t^p+1) \quad \forall t \geq 0 \quad \forall p > 1 \quad \checkmark$$

Esercizio: Sia $\{a_n\}_n$ una successione crescente di numeri positivi

provare che la serie

$$\sum_n A_n \quad \text{dove} \quad A_n = \frac{1}{(1+a_0)(1+a_1)\dots(1+a_n)}$$

è convergente

$\Rightarrow A_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_n A_n$ converge o diverge

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1+a_0)\dots(1+a_n)(1+a_{n+1}) &\geq (1+a_0)\dots(1+a_n) \Rightarrow A_n \leq A_{n+1} \\ \Rightarrow \{A_n\}_n &\text{ è crescente} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \{a_n\}_n \text{ è crescente} \Rightarrow \exists l = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$\Rightarrow$ La serie $\sum_n A_n$ converge

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{1}{\cancel{(1+a_0)}\dots\cancel{(1+a_n)}(1+a_{n+1})} \cdot \cancel{(1+a_0)}\dots\cancel{(1+a_n)} = \frac{1}{1+a_{n+1}} \rightarrow \frac{1}{1+l}$$

sapendo $l \geq 0$ ($\{a_n\}_n$ è successione positiva e crescente)

$$\text{si ha che } \frac{1}{1+l} < 1 \Rightarrow \text{per il criterio del rapporto} \\ \sum_n A_n \text{ converge}$$

Esercizio: provare che $\arctan x \geq \frac{x}{1+x^2} \quad \forall x \geq 0$
dim

Facciamo uno studio molto rapido di $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}$

→ Limiti agli estremi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

→ Regioni di monotonia $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}$

$$f'(x) = \frac{1+x^2-1+x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \text{per } x=0$$

Ne segue che $f(x)$ è crescente $\forall x > 0$

da cui segue che $f(x) \geq f(0) = \min f([0, +\infty)) = 0 \quad \forall x \geq 0$

$$\Rightarrow \arctan x \geq \frac{x}{1+x^2} \quad \forall x \in [0, +\infty[\quad \swarrow$$

Il Teorema dell'Hôpital: osservazioni

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = 0 \Leftrightarrow \boxed{e^x = 1 + x + o(x) \quad x \rightarrow 0}$$

Ma si può fare di meglio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad x \rightarrow 0$$

Come pure, proseguendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{3x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{6x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^4} = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Proseguendo posso migliorare l'approssimazione di e^x quanto voglio. Abbiamo provato

$$e^x = 1 + o(1) \quad x \rightarrow 0$$

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad x \rightarrow 0 \quad \leftarrow \text{Sostituendo } 1+x \text{ a } e^x \text{ commetto un}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad x \rightarrow 0 \quad \text{errore che, quando } x \rightarrow 0, \text{ tende a } 0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad x \rightarrow 0$$

e si può proseguire quanto si vuole

Oss: $\sqrt{2} = 1,41421\dots$ ha parte decimale infinita
non periodica.

$$\sqrt{2} = 1,4 \text{ con un errore inferiore a } \frac{1}{10}$$

$$\sqrt{2} = 1,41 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \frac{1}{100}$$

$$\sqrt{2} = 1,414 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \frac{1}{1000}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\sin x = x + o(x) \quad x \rightarrow 0}$$

ma si può fare di meglio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ (1) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ 1 \end{matrix} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sin x = x + o(x^2) \quad x \rightarrow 0}$$

migliorando ancora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad x \rightarrow 0}$$

migliorando ulteriormente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + x}{12x^2} =$$

$$\stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 1}{24x} \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{24} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad x \rightarrow 0}$$

Riassumendo

$$\sin x = o(1) \quad x \rightarrow 0$$

$$\sin x = x + o(x) \quad x \rightarrow 0$$

$$\sin x = x + o(x^2) \quad x \rightarrow 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad x \rightarrow 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad x \rightarrow 0$$

etc

Esercizio: Studiare $f(x) = 2 \log x - 5 \arctan x$
dici

$$\rightarrow \text{Dom}(f) = \{x: f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x: \log x \in \mathbb{R}\} =]0, +\infty[$$

$$\rightarrow \text{limiti agli estremi} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

per il Teorema dei valori intermedi (f è continua)
si ha che $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ ovvero f suriettiva

$$\rightarrow \text{Regioni di monotonia} \quad f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{5}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2+2x^2-5x}{x(1+x^2)} = 0 \quad \text{se} \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4}$$

$$\text{se} \quad x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = 2$$

dunque

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & 0 < x < \frac{1}{2} \\ < 0 & \frac{1}{2} < x < 1 \\ > 0 & 1 < x \end{cases} \Rightarrow f'(x) \begin{cases} \nearrow & 0 < x < \frac{1}{2} \\ \searrow & \frac{1}{2} < x < 1 \\ \nearrow & 1 < x \end{cases}$$

dunque

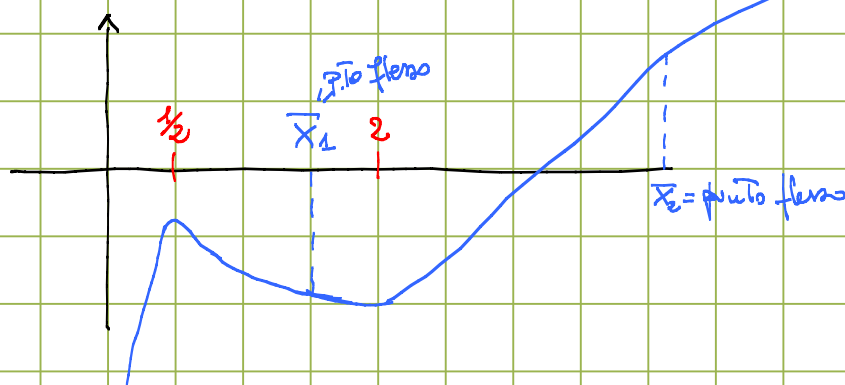
$$x_M = \frac{1}{2} \quad \text{punto di max relativo interno}$$

$$x_m = 2 \quad \text{" " min " "}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \log \frac{1}{2} - 5 \arctan \frac{1}{2} \\ = -\log 4 - 5 \arctan \frac{1}{2} < 0$$

ed essendo $f\left(\frac{1}{2}\right) > f(2)$ ($f \searrow$ in $]\frac{1}{2}, 2[$)

si ha che il grafico è dato da



Ne segue che $f(x) = 0$ ha 1 sola soluzione reale
 $\bar{x} > 2$

Infine si può osservare che, essendo $f' = \frac{2x^2 - 5x + 2}{(1+x^2)^2}$

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{(4x-5)(1+x^2)^2 - 4x(1+x^2)(2x^2-5x+2)}{(1+x^2)^4} = \\ &= \frac{4x + 4x^3 - 5 - 5x^2 - 8x^3 + 20x^2 - 8x}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{-4x^3 + 15x^2 - 4x - 5}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

Il segno di f'' coincide con il segno di $g(x)$ dove
 $g(x) = -4x^3 + 15x^2 - 4x - 5$

$$g'(x) = -12x^2 + 30x - 4 = -2(6x^2 - 15x + 2) = 0$$

ne

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 48}}{12} = \frac{15 \pm \sqrt{177}}{2}$$

$$\underline{x_1 \approx 1}$$

$$\underline{x_2 \approx 14}$$

(177 è molto vicina a $13^2 = 169$)

dunque Trovo 2 punti di flesso

$$f'' \begin{cases} < 0 & 0 < x < \underline{x_1} \\ > 0 & \underline{x_1} < x < \underline{x_2} \\ < 0 & \underline{x_2} < x \end{cases}$$