Lezioni 13 – 14

SERIE:

1) Calcolare:

a) $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$; b) $\sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}$; c) $\sum_{n=6}^{+\infty}\frac{5}{(n-1)(n-2)}$;

2) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

a) $\sum_n\left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n$; b) $\sum_n\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)$; c) $\sum_n\left(\frac{3n+2}{4n+1}\right)^n$; d) $\sum_n\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)$; f) $\sum_n\left(\frac{n}{1+n\sqrt{1+n^3}}\right)$; g) $\sum_n\log\left(\frac{2+n^2}{1+n^2}\right)$; i) $\sum_n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; l) $\sum_n\frac{(2n)!}{5^n\cdot(n!)^2}$; m) $\sum_n\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{1}{n^2}$; n) $\sum_n\frac{\mathrm{sen}(n)-2\cos(2n)}{2^n}$; o) $\sum_n\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$; p) $\sum_n\frac{(-1)^n}{n^2-n\cdot\mathrm{sen}^2(n)}$; s) $\sum_n\frac{\cos(n\pi)}{e^n-n^5}$; t) $\sum_n\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

3) Per quali valori di q (q reale positivo) converge la serie $\sum_n\frac{q^{n+\sin(n)}\cdot\sin(n)}{\sqrt{2+\sin(n)}}$?

4) Se $\alpha<0$, la serie $\sum_n n^{-3\alpha}\cdot\sin\left(n^{4\alpha}\right)$: (A) diverge per ogni $\alpha<0$; (B) converge se $\alpha>-1$; (C) converge se $\alpha<-1/4$; (D) converge se $\alpha<-1$.

5) Per quali valori di α (α reale) converge la serie $\sum_n\frac{2^{n\alpha}}{4^{(\alpha-2)n}}$?

(A) per ogni $\alpha>4$; (B) per ogni $\alpha>1$; (C) per ogni $\alpha<1$; (D) per ogni $\alpha<-2$.

6) Per quali valori di α (α reale) converge la serie $\sum_n\left[n\,\mathrm{sen}\left(n^\alpha\right)+(2+\alpha)^{2n}\right]$?

(A) $\alpha<-2$; (B) $|\alpha+2|<1$; (C) $-3<\alpha<-2$; (D) $-3<\alpha<-2$ o $\alpha>-1$.

7) La serie $\sum_n\left(n^{\alpha-4}+|\alpha-1|^{-n}\right)$ è convergente se: (A) $3<\alpha$; (B) $\alpha<0$ o $2<\alpha<3$; (C) $1<\alpha<2$; (D) $1<\alpha$

8) Dato il parametro $q>0$, per ogni $n\geq 1$ sia $a_n=\sum_{k=1}^{n}q^k$. a) Calcolare esplicitamente a_n in funzione di q e determinare $\lim_{n\to+\infty}a_n$ .b) Discutere al variare di $q>0$ la convergenza della serie $\sum_n\left(q\cdot a_n\right)^n$.

9) Studiare il carattere delle seguenti serie al variare del parametro α:

a) $\sum_n \frac{(-1)^n \cdot n + \sqrt{n}}{n^\alpha}$; c) $\sum_n \frac{(-1)^n \cdot \log(n)}{n^\alpha}$

10) Stabilire per quali valori di x la seguente serie converge: $\sum_n \frac{(6-2x)^n}{2^n \cdot (x-1)^{2n}}$

11) a) Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\log x}$. b) Posto $f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{x \cdot \log x}$ e $a_n = f(n)$, determinare i valori di α per i quali risulta convergente la serie $\sum_n n^\alpha \cdot a_n$.

14) Determinare per quali valori di x converge la serie $\sum_n \left(\frac{x}{x^2-1}\right)^n$ e calcolarne la somma.

RISULTATI:

1) a) 1/12 ; b) $e^{1/2} - 79/48$; c) 5/4 ; d) 2; **2)** a) diverge; b) diverge ; c) converge; d) converge ; f) conv. ; g) conv. . ; i) conv. ; l) conv. ; m) conv. ; n) conv. ; o) conv. ; p) conv. ; s) conv. ; t) div. ; **3)** $q < 1$; **4)** (D) ; **5)** (A) ; **6)** (C) ; **7)** (B) ; **8)** b) se $0 < q < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ converge, se $q > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ diverge.;

9) a) converge se $\alpha > 3/2$; c) converge assolutamente per $\alpha > 1$, converge semplicemente per $0 < \alpha \leq 1$;
10) converge per
$x < -1$ o $x > 2$; **11)** a) 2 ; b) $\alpha < 0$;
14) $\left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$.