

Lezione 12

SUCCESSIONI:

1) Stabilire quali fra le seguenti formule definiscono delle successioni:

a) $a_n = n + 20/n$; b) $a_n = \sqrt{\sin(n)}$; c) $a_n = \operatorname{tg}(\pi \cos(n\pi/6))$; d) $a_n = 1/(n^2 - 20 \cos n)$

2) Se la successione a_n è strettamente crescente, quale delle seguenti affermazioni è falsa?

(A) $a_n \rightarrow +\infty$; (B) a_n non ha massimo; (C) a_n è limitata inferiormente; (D) a_n ha solo estratte monotone

3) Se $-5 \leq a_n \leq 3$ per ogni n , allora:

(A) $a_n \cdot a_{n+1} \leq 25$; (B) $-5 \leq |a_n| \leq 3$; (C) $\inf. a_n = -5$; (D) $\max a_n = 3$

4) Se la successione a_n non è debolmente crescente, allora: (A) ha limite $-\infty$; (B) è monotona decrescente ; (C) non può essere monotona; (D) esiste almeno un n per cui $a_n > a_{n+1}$.

6) Calcolare i seguenti limiti:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{3-n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3(n+1)} \right)$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{n^3} - 2\sqrt{n^5}}{1 + 3\sqrt[3]{n^7}} \right)$; c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n-2}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}} \right)$;

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-1)^n n - 2}{3n - 2} \right)$; e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-1)^n n - 2}{n^2 - 3} \right)$; f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! + (n+1)!}{n! - (n+2)!}$; g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}} \right)$;

h) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 4^n}{3^n}$; i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n}$; j) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{n^2 + n \log n}{n^2}} - 1 \right) \cdot \frac{15n^2}{n-4}$; k) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{2n!}$; l) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$;

m) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{3n}{n}$; n) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + 1}$; o) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + n}$; p) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$; q) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2 - 2 \cos n}$;

r) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} - \frac{n}{7^n}}$; s) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{2n}{3}}{\binom{n}{3}}$; v) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}} \cdot \sin(n!)}{n+1}$

7) Provare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n = 0$

8) Provare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e$ (usare la disuguaglianza di Stirling)

11) Il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n)^{5n} - (5n)^{3n}}{n^8}$ vale: (A) $3/5$; (B) $-5/3$; (C) $-\infty$; (D) $+\infty$

12) Il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\sqrt[3]{1 - \frac{2}{n}} - \sqrt[3]{1 - \frac{3}{n}} \right)$ vale: (A) $1/3$; (B) 1 ; (C) $-2/3$; (D) $+\infty$

13) Il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \cdot \sin\left(\frac{3}{n}\right)}{\sqrt{n^4} - \sqrt{n^4 - 5n^3}}$ vale: (A) $3/5$; (B) $6/5$; (C) 0 ; (D) $+\infty$

14) Il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)^n - n^{2n} \cdot 2^{-2n}}{(2e)^n - e^{2n}}$ vale: (A) 0 ; (B) $+\infty$; (C) $-\infty$; (D) nessuna delle precedenti

15) Data la successione $a_n = \frac{(3n)^n - n^{3n} \cdot 3^{-3n}}{e^{3n} - 3^n \cdot e^n}$, quale fra le seguenti affermazioni è vera?

(A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$; (B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$; (C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$; (D) nessuna delle precedenti è vera.

16) Calcolare il valore del seguente limite al variare di α $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n - n^{cn}}{2n^{4\alpha} - n^3}$

17) Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che, quando $n \rightarrow +\infty$, si ha $n^2 a_n \rightarrow 0$, $n^3 b_n \rightarrow 0$, quale fra le seguenti affermazioni è falsa?

(A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$; (B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = 0$; (C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(a_n - b_n) = 0$; (D) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 a_n \cdot b_n = 0$

18) Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che, quando $n \rightarrow +\infty$, si ha $n^4 a_n \rightarrow 1$, $n^3 b_n \rightarrow 1$, quale fra le seguenti affermazioni è falsa?

(A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 (a_n + b_n) = 1$; (B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 (a_n - b_n) = 0$; (C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^6 a_n \cdot b_n = 0$; (D) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{a_n}{b_n} = 1$

RISULTATI:

2) (A) ; 3) (A) ; 4) (D) ; 6) a) -1 ; b) $-\infty$; c) $5/2$; d) ? ; e) 0 ; f) 0 ; g) 2 ; h) $+\infty$; i) $+\infty$; j) $+\infty$; k) $+\infty$; l) $+\infty$; m) $+\infty$; n) 2 ; o) 2 ; p) 3 ; q) 1 ; r) $1/2$; s) 8 ; v) 0 ; 11) (D) ; 12) (A) ; 13) (B) ; 14) (B) ; 15) (B) ; 16) $-\infty$ se $\alpha < 3/4$ e se $\alpha > 1$, $+\infty$ se $3/4 \leq \alpha < 1$, 0 se $\alpha = 1$; 17) (A) ; 18) (B).