

Esercizio 2 - Matematica 30 ottobre 2013

$$a) c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ è strettamente crescente}$$

$$b) b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \text{ " " decrescente}$$

$$c) c_n \leq b_n \quad \forall n \geq 1$$

Una successione ^{monotona} crescente ha limite

$$l = \sup \{c_n\}$$



$$\exists c = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n > 2 = c_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1$$

$$\exists b = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n > c = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$$

$$b = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n < b_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

$$c \leq b = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n < b_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{81}$$

$$\Rightarrow \exists c = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n \in]2, 3[$$

$$b_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^5 = \frac{5^5}{4^5} =$$

$$b_5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^6 < 3$$

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ è una forma indet. } 1^\infty$$

Esercizio: Provare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$

Ricordo che $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad \forall n > 1$

$$\Rightarrow 2 < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < 3 \quad \forall n > 1$$

sono passati
a una potenza

$$\Rightarrow \sqrt[n]{2} < \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} < \sqrt[n]{3} \quad \forall n > 1$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow n \rightarrow +\infty & & \downarrow n \rightarrow +\infty \\ 1 & & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$$

↑ per il Teorema
dei 2 carabinieri

Esercizio $\sqrt[n]{a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \forall a > 0$

lim

$$a > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = 1 + b_n \quad b_n > 0$$

$$\Rightarrow a = (1 + b_n)^n \underset{\text{Bernoulli}}{>} 1 + n b_n \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow Q-1 \geq n b_n \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{Q-1}{n} \geq b_n > 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$\downarrow_{n \rightarrow +\infty}$$

$$\downarrow_{n \rightarrow +\infty}$$

$$0$$

Th. 2 Corollari

$$\Rightarrow b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{Q} = 1 + b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

$$Q < 1 \Rightarrow \frac{1}{Q} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{Q}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{Q} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

—○—

Alternativamente $Q_n = Q \Rightarrow \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{Q}{Q} = 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sqrt[n]{Q} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$

Esercizio: Provare che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

dim

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1 + \frac{n^2}{n} = 1 + n$$

$\uparrow$ Bernoulli

$$\downarrow_{n \rightarrow +\infty}$$

$+ \infty$

Teorema Confronto

$\Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$$



(Una) Formula di Stirling

Da fare
2 casi $\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$

Questo dice che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e \cdot \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = 1$$

ovvero $e^n \sim \frac{n^n}{n!}$ per $n \rightarrow \infty$

Proviamo che $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq n e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$ $\forall n \geq 1$

dim

① - $n=1$ $\frac{1}{e} \leq 1$ vero!!

- suppongo che $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!$ (hip. induttiva)

- Devo provare $\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \leq (n+1)!$

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} &= \left(\frac{n}{e}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &\stackrel{\text{hip. ind.}}{\leq} n! \cdot \frac{n+1}{e} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq n! \cdot \frac{n+1}{e} \cdot e = (n+1)! \end{aligned}$$

② - $n=1$ $1! \leq 1 \cdot e \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^1 = 1$ vero!

• suppongo $n! \leq n e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (hip. induttiva)

• Voglio provare $(n+1)! \leq (n+1) \cdot e \cdot \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$

$$(n+1) \cdot e \cdot \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} = (n+1) \cdot e \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{e}\right)^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
&= (n+1) \cdot e \cdot \frac{n}{e} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \\
&= \frac{n+1}{e} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \underbrace{ne \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}_{n!} \\
&\geq \frac{n+1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot n! \geq \frac{n+1}{e} \cdot \cancel{e} \cdot n! = (n+1)! \quad \downarrow
\end{aligned}$$

Esercizio

Sia data $\{Q_n\}_n : -5 \leq Q_n \leq 3 \quad \forall n$

1) È vero che $-5 \leq |Q_n| \leq 3 \quad \forall n$? **FALSO**

Devo costruire $\{Q_n\}_n$ t.c.

$-5 \leq Q_n \leq 3$ e non è vero $(-5 \leq |Q_n| \leq 3)$

prendo $\{Q_n\}_n = \{-4\}_n \quad \forall n$: questo è il

controesempio cercato in quanto $-5 \leq Q_n \leq 3$ ma $|Q_n| = 4 > 3$

2) È vero che $\max_{n \in \mathbb{N}} \{Q_n\} = 3$? **FALSO**

Controesempio: prendo $\{Q_n\}_n = \{(-1)^n\}_n$ in ho

$$\max_n \{Q_n\} = 1 < 3$$

3) È vero che $Q_n \cdot Q_{n+1} \leq 25 \quad \forall n$? **VERO**

$$Q_n \cdot Q_{n+1} \leq |Q_n| \cdot |Q_{n+1}| \leq 5 \cdot 5 = 25$$

Infatti
 $-5 \leq Q_n \leq 3 \Rightarrow |Q_n| \leq \max\{|-5|, |3|\} = 5$

4) È vero che $\inf_n \{Q_n\} = -5$? **FALSO**

Controesempio $\{Q_n\}_n = \{2 + (-1)^n\}_n$ $\inf_n Q_n = \min_n Q_n = \frac{1}{-5}$

Esercizio: Sia $\{Q_n\}_n$ t.c. non è debolmente crescente
 non $\forall n (Q_n \leq Q_{n+1})$

$\forall n Q_n > Q_{n+1}$

1) è strettamente decrescente? **FALSO!**

Controesempio $\{Q_n\}_n = \{(-1)^n\}_n$

2) non può essere monotona? **FALSO!**

Controesempio $\{Q_n\}_n = \{\frac{1}{n}\}_n$ è monotona, strett. decrescente e non è debolmente crescente

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = -\infty$? **FALSO!**

Controesempio $\{Q_n\}_n = \{\frac{1}{n}\}_n$ $\lim_n \frac{1}{n} = 0 > -\infty$

4) $\exists n : Q_n > Q_{n+1}$? **VERO!**

Infatti per ipotesi "non è vero $(\forall n Q_n \leq Q_{n+1})$ "



"non $\leq$ ($\Rightarrow$) $>$ " $\exists n : Q_n > Q_{n+1}$



Esercizio $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 4^n}{3^n} = +\infty$

infatti, $\underbrace{\left(\frac{4}{3}\right)^n}_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ +\infty}} \cdot \underbrace{\left(\left(\frac{2}{4}\right)^n + 1\right)}_{\substack{\downarrow n \rightarrow +\infty \\ 1}}$

OPERAZIONI in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$\forall c \in \mathbb{R} \quad c + \infty = +\infty \quad c - \infty = -\infty$

$c > 0 \quad \frac{c}{+\infty} = 0^+ \quad \frac{c}{-\infty} = 0^-$

$c \cdot +\infty = +\infty \quad c \cdot (-\infty) = -\infty$

$c < 0 \quad \frac{c}{+\infty} = 0^- \quad \frac{c}{-\infty} = 0^+$

$c \cdot +\infty = -\infty \quad c \cdot (-\infty) = +\infty$

$c > 0 \quad \frac{+\infty}{c} = +\infty \quad \frac{-\infty}{c} = -\infty$

$c < 0 \quad \frac{+\infty}{c} = -\infty \quad \frac{-\infty}{c} = +\infty$

$+\infty + \infty = +\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

$c > 0 \quad \frac{c}{0^+} = +\infty$

$\frac{c}{0^-} = -\infty$

$c < 0 \quad \frac{c}{0^+} = -\infty$

$\frac{c}{0^-} = +\infty$

$$-\infty + \infty ? \quad 0 \cdot \infty ? \quad \frac{\infty}{\infty} ? \quad 1^\infty ? \quad 0^0 ? \quad \frac{\infty}{\infty} ?$$

$$\infty^0 ?$$

Esercizio Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{2 \cdot (n!)^2}$$

dimu

$$\frac{\infty}{\infty} \quad a_n = \frac{(2n)!}{2 \cdot (n!)^2} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)! \cdot 2} \cdot \frac{n! \cdot 2}{(2n)!}$$

$$= \frac{\cancel{(2n)!} \cdot (2n+1)(2n+2)}{\cancel{n!} \cdot (n+1) \cdot \cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{n!} \cdot \cancel{2}}{\cancel{(2n)!}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1}$$

$$= \frac{(2n+1)\cancel{(n+1)} \cdot 2}{\cancel{n+1}} = 4n+2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Esercizio Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\sqrt[3]{1 - \frac{2}{n}} - \sqrt[3]{1 - \frac{3}{n}} \right)$$

dimu

$$\infty \cdot (1-1) \quad \text{F.I.} \quad (a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a = \sqrt[3]{1 - \frac{2}{n}} \quad b = \sqrt[3]{1 - \frac{3}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \left(\sqrt[3]{1 - \frac{2}{n}} - \sqrt[3]{1 - \frac{3}{n}} \right) \cdot \frac{(1 - \frac{2}{n})^{2/3} + (1 - \frac{2}{n})^{1/3}(1 - \frac{3}{n})^{1/3} + (1 - \frac{3}{n})^{2/3}}{1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot \left(\sqrt[3]{1 - \frac{2}{n}} - \sqrt[3]{1 + \frac{3}{n}} \right)}{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{3}$$

Esercizio Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sec \frac{1}{n}}{1 - \cos \frac{1}{n}}$

dim

$$\lim_n \frac{\sec \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \lim_n \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{1 - \cos \frac{1}{n}} = 2$$

$$\lim_n \frac{\sec \frac{1}{n}}{1 - \cos \frac{1}{n}} = \lim_n \frac{\sec \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{1 - \cos \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_n \frac{\sec \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \lim_n \frac{\frac{1}{n}}{1 - \cos \frac{1}{n}} = 1 \cdot 2 = 2$$

$$\lim_n \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}$$

Esercizio: Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$

$a_n > 0$ e $b_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ Tali che

$$n^2 a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad n^3 b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

1) È vero che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$? **FALSO**

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^3 a_n}{n^3 b_n} \quad ; \quad \text{se prendo } b_n : n^3 b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$a_n : n^2 a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{ma } n^3 a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

ho trovato un controesempio.

$$\{a_n\}_n = \left\{ \frac{1}{n^3} \right\}_n \quad \{b_n\}_n = \left\{ \frac{1}{n^4} \right\}_n$$

$$n^2 a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$n^3 b_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ma

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n^3} \cdot n^4 = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

È vero che $\lim_n n^4 a_n b_n = 0$? **VERO**

$$\text{infatti } \lim_n n^2 a_n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_n n^2 b_n = \lim_n \frac{1}{n} \left(n^3 b_n \right) \\ = \lim_n \frac{1}{n} \cdot \lim_n n^3 b_n = 0$$

$$\text{dunque } \lim_n n^4 a_n b_n = \lim_n (n^2 a_n) \cdot \lim_n (n^2 b_n) = 0$$

È vero che $\lim_n n(a_n - b_n) = 0$? **VERO**

$$\text{infatti } \lim_n n a_n = \lim_n \frac{1}{n} \cdot (n^2 a_n) = \lim_n \frac{1}{n} \lim_n n^2 a_n = 0$$

$$\lim_n n b_n = \lim_n \frac{1}{n^2} (n^3 b_n) = \lim_n \frac{1}{n^2} \lim_n n^3 b_n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_n n(a_n - b_n) = \lim_n n a_n - \lim_n n b_n = 0 \quad \checkmark$$