Analisi Matematica 1

Correzione della prova scritta del 18 luglio 2014

1. Determinare estremo inferiore ed estremo superiore dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{p+1}{q} \; : \; p, q \in \mathbb{N}, \; 1 \le p < 3q \right\}.$$

Stabilire quindi se si tratta di minimo e/o massimo.

Comunque si prendano $p, q > 0$, si ha $\frac{p+1}{q} > 0$
e dunque $\inf A \geq 0$

Presa la successione $\{a_n\} = \left\{\frac{2}{n}\right\}$ si ha $\{a_n\} \subseteq A$
e $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$. Ne segue che
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists p_\varepsilon = 1, q_\varepsilon > 1 \; : \; \frac{2}{q_\varepsilon} < \varepsilon$, ovvero $0 = \inf A$

Osserviamo che $0 \notin A$, ovvero $\nexists \min A$

Per quanto riguarda l'estremo superiore si ha

$$\frac{p+1}{q} < \frac{3q+1}{q} = 3 + \frac{1}{q} \qquad \forall p, q \geq 1 \qquad 1 \leq p < 3q$$

Ne segue che $3 + 1/q \in \mathcal{M}_A \quad \forall q$

Ma l'insieme $\mathcal{M}_A$ è chiuso, e dunque $\lim_{q \to +\infty} 3 + 1/q = 3 \in \mathcal{M}_A$

Ma $3 \in A$ infatti, preso $p = 2$ e $q = 1$ si ha $1 \leq p = 2 < 3 \cdot 1 = 3q$
e $\frac{2+1}{1} = 3$

Ne segue che $3 \in A \cap \mathcal{M}_A \Rightarrow 3 = \max A$

1. Calcolare l'integrale

$$\int_1^e \frac{4(\log(x))^2 + 5\log(x) + 4}{x(\log(x)+1)((\log(x))^2 + \log(x) + 1)} dx$$

posto $y = \log x$ $\quad dx = e^y dy \quad$ si ha $x = 1 \longmapsto \log 1 = 0$

$e^y = x \qquad\qquad x = e \longmapsto \log e = 1$

e l'integrale diventa

$$\int_0^1 \frac{4y^2+5y+4}{\cancel{e^y}(y+1)(y^2+y+1)} \cdot \cancel{e^y} dy$$

Adesso bisogna decomporre in fratti semplici la funzione integranda

$$\frac{4y^2+5y+4}{(y+1)(y^2+y+1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{By+C}{y^2+y+1} = \frac{Ay^2+Ay+A+By^2+Cy+By+C}{(y+1)(y^2+y+1)}$$

$$\begin{cases} A+B = 4 \\ A+B+C = 5 \\ A+C = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 3 \\ C = 5-4 = 1 \\ B = 1 \end{cases} \qquad \| \quad \frac{3}{y+1} + \frac{y+1}{y^2+y+1}$$

$$\frac{3}{y+1} + \frac{1}{2}\frac{2y+2}{y^2+y+1} = \frac{3}{y+1} + \frac{1}{2}\frac{2y+1}{y^2+y+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(y+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{3}{y+1} + \frac{1}{2}\frac{(y^2+y+1)'}{y^2+y+1} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{4}^{2}}{3}\frac{2/\sqrt{3}}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(y+\frac{1}{2})\right]^2+1} \cdot \sqrt{3}/2$$

$$\int_0^1 f(y)dy = \int_0^1 \frac{3dy}{y+1} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(y^2+y+1)'}{y^2+y+1}dy + \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{2/\sqrt{3}}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(y+\frac{1}{2})\right]^2+1}dy$$

$$= \Big[3\log|1+y|\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\Big[\log(y^2+y+1)\Big]_0^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(y+\frac{1}{2})\right]\Big]_0^1$$

$$= 3\log 2 + \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$= 3\log 2 + \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6}$$

3. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_n \log\left(1+\frac{\pi}{2}-\arctan(n^\alpha)\right).$$

Essendo $\operatorname{arctg}(n^\alpha) \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall \alpha$, si ha

$a_n = \log\left(1+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(n^\alpha)\right) \geq 0$ $\forall n$ $\forall \alpha$

e dunque la serie o converge o diverge a $+\infty$

Osserviamo inoltre che, quando $\alpha \leq 0$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n^\alpha\right) = \begin{cases} \log\left(1+\frac{\pi}{2}\right) & \alpha<0 \\ \log\left(1+\frac{\pi}{4}\right) & \alpha=0 \end{cases}$$

e dunque $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n^\alpha\right) \neq 0$

e dunque $\sum_n a_n$ diverge a $+\infty$ $\forall \alpha \leq 0$

Per trattare il caso $\alpha>0$, ricordiamo che

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x \quad \forall x>0$$

e dunque,

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{n^\alpha} = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n^\alpha \quad \forall n\geq 1 \quad \forall \alpha>0$$

Ricordando che

$\log(1+z) = z+o(z)$ per $z\to 0$ $\qquad$ $\operatorname{arctg}\frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ $n\to+\infty$ $\forall \alpha>0$

si ha

$$\begin{aligned} a_n &= \log\left(1+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \forall n\geq 1 \quad \forall \alpha>0 \\ &= \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) \quad \text{"} \quad \text{"} \\ &= \frac{1}{n^\alpha}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{"} \quad \text{"} \end{aligned}$$

da cui segue $a_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$ $\forall n\geq 1$ $\forall \alpha>0$

ma $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\forall \alpha>1$, diverge $\forall \alpha \leq 1$

Criterio Confronto asintotico

$\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ converge $\forall \alpha>1$, diverge $\forall \alpha \in (0,1]$

RIASSUMENDO $\sum_n a_n$ converge $\forall \alpha > 1$
diverge $\forall \alpha \leq 1$

4. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(x) - y'' + 2y'(x) + 4y(x) = 4x^2 + e^x, \\ y(0) = 13/6, \\ y'(0) = 1/6, \\ y''(0) = 1/6, \end{cases}$$

e indicare esplicitamente l'intervallo più grande contenente $x = 0$ in cui tale soluzione è definita.

Equazione Omogenea Associata

$$y'''(x) - y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = 0$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$

$\lambda_1 = -1$ è soluzione e quindi $(\lambda+1)$ divide $\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda + 4$, cioè

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda + 4 & \lambda + 1 \\ \lambda^3 + \lambda^2 & \lambda^2 - 2\lambda + 4 \\ \hline // \; -2\lambda^2 + 2\lambda + 4 & \\ \quad -2\lambda^2 - 2\lambda & \\ \hline \quad // \quad 4\lambda + 4 & \end{array} \Rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda + 4 = (\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0$$

Ma $\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1-4} = 1 \pm i\sqrt{3}$, dunque restano individuate 3 radici semplici dell'eq. caratteristica

$\lambda_1 = -1$ che individuano $y_1(x) = e^{-x}$

$\lambda_2 = 1 - i\sqrt{3}$ $\longrightarrow$ $y_2(x) = e^x \cos(\sqrt{3}\, x)$

$\lambda_3 = 1 + i\sqrt{3}$ 3 soluzioni dell'eq. omogenea associata $y_3(x) = e^x \operatorname{sen}(\sqrt{3} \cdot x)$

Dunque $y_{omo}(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 e^x \cos(\sqrt{3}\, x) + c_3 e^x \operatorname{sen}(\sqrt{3}\, x)$
$\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

rappresenta l'integrale generale (la totalità) delle soluzioni dell'equazione omogenea associata

Soluzione particolare dell'eq. $y''' - y'' + 2y'(x) + 4y(x) = 4x^2 \quad (*)$

Il termine noto è un polinomio di 2° grado, quindi cerchiamo una sol. particolare del tipo $\bar{y}(x) = ax^2 + bx + c$

$$\bar{y}''' - \bar{y}'' + 2\bar{y}' + 4\bar{y} = \phi - 2a + 2(2ax + b) + 4(ax^2 + bx + c) = 4x^2$$

$$\Rightarrow 4ax^2 + (4b + 4a)x + (4c + 2b - 2a) = 4x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 4b + 4a = 0 \\ 4c + 2b - 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ 4c = -2b + 2a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \sigma_1(x) = x^2 - x + 1$ è sol. particolare di $(*)$

Soluzione particolare dell'eq. $y''' - y'' + 2y'(x) + 4y(x) = e^x \quad (**)$

Il termine noto è e^x, e noi cerchiamo una soluzione del tipo $\sigma(x) = k \cdot e^x$ (N.B. e^x NON È SOLUZIONE DELL'EQ. OMOGENEA)

Impongo $\sigma(x)$ soluzione di $(**)$

$$(ke^x)''' - (ke^x)'' + 2(ke^x)' + 4ke^x = e^x$$

$$e^x(k - k + 2k + 4k) = e^x$$

$$k = 1/6$$

$\Rightarrow \quad \sigma_2(x) = e^x/6$ è soluzione di $(**)$

Per il principio della sovrapposizione degli effetti

$$(\sigma_1+\sigma_2)''' - (\sigma_1+\sigma_2)'' + 2(\sigma_1+\sigma_2)' + 4(\sigma_1+\sigma_2) = 4x^2 + e^x$$

ovvero $(\sigma_1+\sigma_2)(x)$ è sol particolare dell'eq. differenziale di partenza (la completa) e dunque

INTEGRALE GENERALE dell'eq. differenziale completa

$$y_{gen}(x) = y_0(x) + \sigma_1(x) + \sigma_2(x)$$

$$= c_1 e^{-x} + c_2 e^x \cos(\sqrt{3}x) + c_3 e^x \operatorname{sen}(\sqrt{3}x) + x^2 - x + 1 + e^x/6$$

$$\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y_{gen}(0) = c_1 + c_2 + 1 + 1/6 = 13/6}$$

$$c_1 + c_2 = \frac{12}{6} - \frac{6}{6} = 1$$

$$y'_{gen}(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^x \cos\sqrt{3}x + c_3 e^x \operatorname{sen}\sqrt{3}x - \sqrt{3}c_2 e^x \operatorname{sen}\sqrt{3}x + \sqrt{3}c_3 e^x \cos\sqrt{3}x$$
$$+ 2x - 1 + e^x/6$$

$$\boxed{y'_{gen}(0) = -c_1 + c_2 + \sqrt{3}c_3 - 1 + 1/6 = 1/6}$$

$$-c_1 + c_2 + \sqrt{3}c_3 = 1$$

$$y''_{gen}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x \cos\sqrt{3}x + c_3 e^x \operatorname{sen}\sqrt{3}x - \sqrt{3}c_2 e^x \operatorname{sen}(\sqrt{3}x) + \sqrt{3}c_3 e^x \cos\sqrt{3}x$$
$$- \sqrt{3}c_2 e^x \operatorname{sen}\sqrt{3}x - 3c_2 e^x \cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}c_3 e^x \cos\sqrt{3}x - 3c_3 e^x \operatorname{sen}\sqrt{3}x + 2 + \frac{e^x}{6}$$

$$\boxed{y''_{gen}(0) = c_1 + c_2 + \sqrt{3}c_3 - 3c_2 + \sqrt{3}c_3 + 2 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_1 + c_2 + \sqrt{3}c_3 = 1 \\ c_1 - 2c_2 + 2\sqrt{3}c_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ -1 + c_2 + c_2 + \sqrt{3}c_3 = 1 \\ 1 - c_2 - 2c_2 + 2\sqrt{3}c_3 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ 2c_2 + \sqrt{3}c_3 = 2 \\ -3c_2 + 2\sqrt{3}c_3 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} // \\ 4c_2 + 2\sqrt{3} = 4 \\ -3c_2 + 2\sqrt{3}c_3 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} // \\ 7c_2 = 7 \\ // \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

Dunque la soluzione del problema di Cauchy è data da

$$y(x) = e^x \cos(\sqrt{3} \cdot x) + x^2 - x + 1 + \frac{e^x}{6}$$

ed è definita $\forall x \in \mathbb{R}$