Analisi Matematica 1

Correzione della prova scritta del 30 giugno 2014

1. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il valore del limite

$$\ell(\alpha) := \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 - \sin x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{x^{\alpha(6-\alpha)-1}}.$$

Calcolate poi $\lim_{\alpha\to 1^-} \ell(\alpha)$.

Andiamo a determinare la parte principale per $x \to 0^+$ dell'infinitesimo $f(x) = e^x - 1 - \sin x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

$$f(x) = \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{x^4}{24} - \cancel{1} - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^3}{6}} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \cancel{\frac{x^3}{3}} + o(x^4)$$

$$= \frac{x^4}{24} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0^+$$

Ora si può calcolare il limite

$$\ell(\alpha) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^{6\alpha-\alpha^2-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{24} \cdot \frac{1+o(1)}{x^{6\alpha-\alpha^2-1-4}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{24} \frac{1+o(1)}{x^{6\alpha-\alpha^2-5}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \text{ o } 5 < \alpha \\ 1/24 & \text{se } \alpha = 1 \text{ o } \alpha = 5 \\ +\infty & 1 < \alpha < 5 \end{cases}$$

in quanto si ha

$$6\alpha - \alpha^2 - 5 = -(\alpha^2 - 6\alpha + 5) = -(\alpha-5)(\alpha-1) \geq 0$$

se $(\alpha-5)(\alpha-1) \leq 0$ se $\alpha \in [1,5]$

Si osserva che $\ell(1) = 1/24$, ma per definizione di limite, essendo $\ell(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in]-\infty, 1[$, si ha

$$\lim_{\alpha \to 1^-} \ell(\alpha) = 0$$

2. Determinare per quali valori di $\alpha \geq 1/2$ converge la serie

$$\sum_n \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{n}{1+n^{2\alpha}}\right).$$

Quando $\alpha = \frac{1}{2}$ si ha $a_n = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{n}{1+n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos\left(\frac{3}{2}\pi + 1\right) \neq 0$ da cui segue che $\sum_n a_n$ non converge in quanto non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza.

Quando $\alpha > \frac{1}{2}$, osserviamo più in generale che

$$a_n = \underbrace{\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)}_{=0} \cos\left(\frac{n}{1+n^{2\alpha}}\right) - \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right)}_{=-1} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{1+n^{2\alpha}}\right)$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^{2\alpha-1}} - \frac{1}{n^{2\alpha-1}(1+n^{2\alpha})}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^{2\alpha-1}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-1}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n^{2\alpha-1}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-1}}\right) \quad \text{per } \alpha > \tfrac{1}{2} \text{ ed } n \to +\infty$$

Dunque •) $a_n \sim \frac{1}{n^{2\alpha-1}}$ per $n \to +\infty$ $\forall \alpha > \frac{1}{2}$

•) $\sum_n \frac{1}{n^{2\alpha-1}}$ converge <u>se</u> $2\alpha - 1 > 1$

<u>se</u> $2\alpha > 2$

<u>se</u> $\alpha > 1$

Per il criterio del confronto asintotico si ha

$\sum_n a_n$ converge <u>se</u> $\alpha > 1$

3. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale

$$\int_1^{+\infty} (f(x))^\alpha \, dx, \qquad \text{dove} \quad f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}(x+1)\log(x)}.$$

La funzione $f(x)$ è continua su $]1,+\infty[$, e si ha

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{1}{2}\lim_{x\to1^+} \frac{x-1}{\log(1+(x-1))} = \frac{1}{2}\lim_{y\to0^+}\frac{y}{\log(1+y)} = \frac{1}{2}$$

e dunque $f(x)$ si può estendere per continuità in $x=1$ ed in particolare $\int_1^{10} (f(x))^\alpha dx \in \mathbb{R} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Resta da studiare $\int_{10}^{+\infty} (f(x))^\alpha dx$

Dunque la convergenza o meno dell'integrale dipende dal comportamento di f quando $x \to +\infty$

$$(f(x))^\alpha = \left[\frac{(x-1)}{\sqrt{x}(x+1)\log x}\right]^\alpha \sim \frac{1}{x^{\alpha/2}(\log x)^\alpha} \quad \text{per } x\to+\infty$$

$$\left(\text{infatti, } \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\cancel{\sqrt{x}}(x+1)\cancel{\log x}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x}}\,\cancel{\log x}}{1} = 1\right)$$

Dunque • $f(x)^\alpha \sim \left(\frac{1}{\sqrt{x}\log x}\right)^\alpha \quad x\to+\infty$

• $\int_{10}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}\log x}\right)^\alpha dx$ converge (*) se $\alpha/2 > 1$ se $\alpha > 2$

Per il criterio del confronto per gli integrali impropri

$\int_{10}^{+\infty} (f(x))^\alpha dx$ converge se $\alpha > 2$

(*) Quando $\alpha/2 > 1$ si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}\log x}\right)^\alpha}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^\alpha} = 0$

e $\int_{10}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^\alpha dx \in \mathbb{R} \ \forall \alpha > 2 \underset{\text{Criterio Confronto}}{\Rightarrow} \int_{10}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}\log x}\right)^\alpha dx \in \mathbb{R}$

Quando $\alpha = 2$ $\displaystyle\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x\log x} \underset{\substack{y=\log x \\ dy=\frac{1}{x}dx}}{=} \int_{\log 10}^{+\infty} \frac{dy}{y} = +\infty$

4. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(x) - 2y''(x) = 2\cos x + 6\sin x - 12x + 10, \\ y(0) = 3, \\ y'(0) = 5, \\ y''(0) = 0, \end{cases}$$

e indicare esplicitamente l'intervallo più grande contenente $x = 0$ in cui tale soluzione è definita.

Int. generale omogenea $y'''(x) - 2y''(x) = 0$. Questa ha come equazione caratteristica $\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0$ che ha come soluzioni

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0\end{matrix}\right\} \text{molteplicità } 2 \longrightarrow \begin{cases} y_1(x) = 1 \\ y_2(x) = x \\ y_3(x) = e^{2x} \end{cases}$$

$$\lambda_3 = 2$$

e dunque l'integrale generale dell'eq. omogenea associata è

$$y_{omo}(x) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 e^{2x} \quad \forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Integrale particolare di $y''' - 2y'' = 2\cos x + 6\sin x$ (*)

Cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$\upsilon(x) = A\cos x + B\sin x$

$\upsilon'(x) = -A\sin x + B\cos x$

$\upsilon''(x) = -A\cos x - B\sin x$

$\upsilon'''(x) = A\sin x - B\cos x$

Sostituendo nell'equazione e imponendo che $\upsilon(x)$ sia soluzione di (*) si ottiene

$$A\sin x - B\cos x - 2(-A\cos x - B\sin x) = 2\cos x + 6\sin x$$

$$(A+2B)\sin x + (-B+2A)\cos x = 6\sin x + 2\cos x$$

$$\begin{cases} A + 2B = 6 \\ 2A - B = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} A + 4A - 4 = 6 \\ B = 2A - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 5A = 10 \\ // \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2 \\ B = 2 \end{cases}$$

ovvero $\upsilon_1(x) = 2\cos x + 2\sin x$

Integrale particolare di $y''' - 2y'' = -12x + 10$ (**)

Voglio cercare una soluzione della forma $ax + b$ ma osservo che $y(x) = 1$ (e dunque $y = b$) è soluzione dell'equazione omogenea.

Cerco allora una soluzione particolare nella forma

$$x \cdot (ax + b) = ax^2 + bx$$

ma ancora una volta $y(x)=x$ (e dunque $y(x)=bx$)
è soluzione dell'equazione omogenea
Cerco allora una soluzione particolare nella forma

$$\bar{y}(x)=x^2(ax+b)=ax^3+bx^2$$

Imponendo che $\bar{y}(x)$ sia soluzione di (**)

$$(ax^3+bx^2)'''-2(ax^3+bx^2)''=-12x+10$$

$$6a-2(6ax+2b)=-12x+10$$

$$-12ax+(6a-4b)=-12x+10$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}-12a=-12\\ 6a-4b=10\end{cases} \quad \begin{cases}a=1\\ 6-4b=10\end{cases} \quad \begin{cases}a=1\\ -4=4b\end{cases} \quad \begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{y}_2(x)=x^3-x^2$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti (l'equazione è LINEARE) la soluzione particolare sarà data dalla somma delle soluzioni particolari, cioè $\bar{y}(x)=\bar{y}_1(x)+\bar{y}_2(x)$

INTEGRALE GENERALE

$$y_G(x)=c_1+c_2x+c_3e^{2x}+2\operatorname{sen}x+2\cos x+x^3-x^2$$

$$\forall c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{y_G(0)=c_1+c_3+2=3}$$ 1ª condizione iniziale

$$y_G'(x)=c_2+2c_3e^{2x}+2\cos x-2\operatorname{sen}x+3x^2-2x$$

$$\boxed{y_G'(0)=c_2+2c_3+2=5}$$

$$y_G''(x)=4c_3e^{2x}-2\operatorname{sen}x-2\cos x+6x-2$$

$$\boxed{y_G''(0)=4c_3-2-2=0}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 1 \\ c_2 + 2c_3 = 3 \\ 4c_3 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

e la soluzione del pb. di Cauchy è dunque

$$y(x) = x + e^{2x} + 2\,\text{sen}\,x + 2\cos x + x^3 - x^2$$

che risulta definita su tutto $\mathbb{R}$.