Analisi Matematica 1
Lunedì 16 giugno 2014

Correzione del compito finale

1. Data la funzione
$$f(x) = \frac{x-4}{x-2}e^x,$$
determinarne il dominio massimale di definizione Ω, i limiti agli estremi di Ω, le equazioni degli eventuali asintoti, il segno, gli intervalli di monotonia, evidenziando in quali punti f è derivabile. Studiare poi la concavità/convessità di f e tracciarne un grafico approssimativo.

Il dominio massimale di $f(x)$ è $\mathbb{R} \setminus \{2\} = \Omega$

Limiti agli estremi di Ω

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-4}{x-2} \lim_{x\to-\infty} e^x = 1 \cdot 0^+ = 0^+$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} \cdot \lim_{x\to 2^-} (x-4)e^x = -\infty \cdot (-2e^2)$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \dots = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-4}{x-2} \lim_{x\to+\infty} e^x = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$x=2$ è un ASINTOTO VERTICALE

SEGNO di $f(x)$

$e^x > 0 \ \forall x$, quindi $\text{segno}(f(x)) = \text{segno}\left(\frac{x-4}{x-2}\right)$

$\frac{x-4}{x-2} > 0$ <u>se</u> $x<2$ o $4<x$

$f(4)=0$

INTERVALLI DI MONOTONIA

$$f'(x) = \left(\frac{x-4}{x-2}e^x\right)' = \frac{x-2-(x-4)}{(x-2)^2}e^x + \frac{x-4}{x-2}e^x$$

$$= \frac{2}{(x-2)^2}e^x + \frac{x^2-6x+8}{(x-2)^2}e^x = \frac{x^2-6x+10}{(x-2)^2}e^x$$

e dunque $f'(x)$ è definita per $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

e si ha ($3-10<0$, e dunque $x^2-6x+10>0\ \forall x$)

$f'(x)>0\ \forall x\neq 2$

CONCAVITÀ e CONVESSITÀ

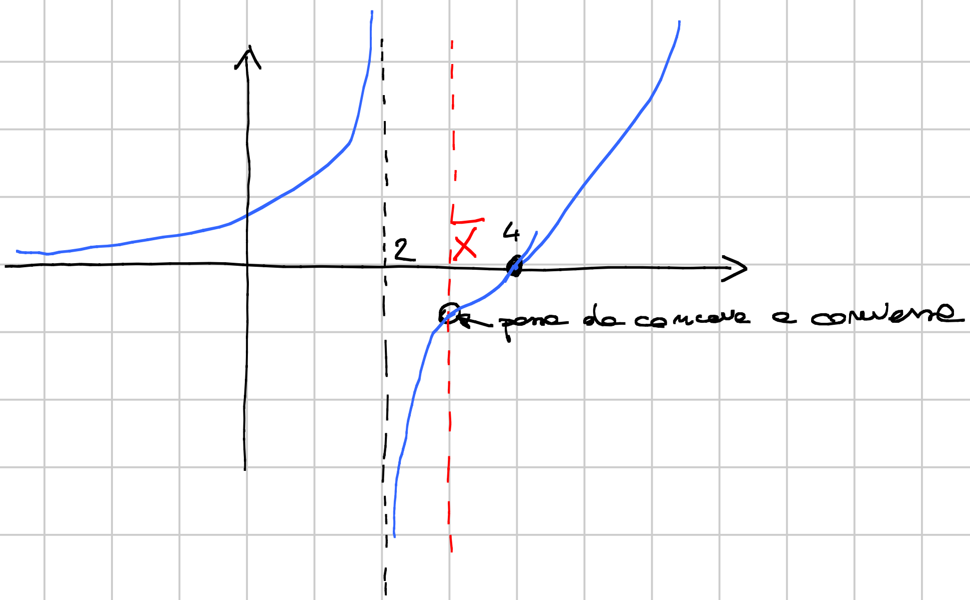
$$f''(x) = \left(\frac{x^2-6x+10}{(x-2)^2}e^x\right)' = -2\frac{x^2-6x+10}{(x-2)^3}e^x + \frac{2x-6}{(x-2)^2}e^x + \frac{x^2-6x+10}{(x-2)^2}e^x$$

$$= \frac{e^x}{(x-2)^3}\left\{\cancel{-2x^2}+12x-20+(\cancel{2x^2}-10x+12)+(x^3-6x^2+10x-2x^2+12x-20)\right\}$$

$$= \frac{e^x}{(x-2)^3}\underbrace{\left\{x^3-8x^2+24x-28\right\}}_{P(x)}$$

$$\begin{cases} P(x)<0\ \forall x<0,\ P(0)=-28, \\ P(x)>0\ \forall x>\bar{x}>3 \\ P'(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow f''(x)>0\ \forall x<2 \qquad f''(x)<0\ \forall x\in(2,\bar{x}) \qquad f''(x)>0\ \forall x>\bar{x}$



2. Calcolare tutte le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{4e^x + e^{2x} - e^{6x}}{(1+e^{2x})(1-e^{2x})}.$$

$$\int \frac{4e^x+e^{2x}-e^{6x}}{(1+e^{2x})(1-e^{2x})}\,dx \underset{\substack{x=\log y\\ dx=\frac{dy}{y}}}{=} \left(\int \frac{4y+y^2-y^6}{(1+y^2)(1-y^2)}\cdot\frac{dy}{y}\right)_{y=e^x}$$

$$\int \frac{4+y(1-y^4)}{(1+y^2)(1-y^2)}\,dy = \int y\,dy + \int \frac{4}{(1+y)(1-y)(1+y^2)}\,dy$$

$$\frac{4}{(1+y^2)(1-y^2)} = \frac{A}{(1-y)} + \frac{B}{(1+y)} + \frac{Cy+D}{1+y^2} =$$

$$= \frac{A(1+y^2+y+y^3)+B(1+y^2-y-y^3)+(Cy+D)(1-y^2)}{(1-y^2)(1+y^2)}$$

$$\begin{array}{l} (1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{array}\begin{cases} A+B+D=4\\ A-B+C=0\\ A+B-D=0\\ A-B-C=0\end{cases} \qquad \begin{array}{l}(1)-(3)\\(2)-(4)\\ \\ \\ \end{array}\begin{cases}2D=4\\ 2C=0\\ A+B+D=4\\ A-B+C=0\end{cases} \qquad \begin{cases} D=2\\ C=0\\ A+B+2=4\\ A-B=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} D=2\\ C=0\\ A=1\\ B=1\end{cases} \Rightarrow \frac{4}{(1-y^2)(1+y^2)} = \frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}+\frac{2}{1+y^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{4}{(1-y^2)(1+y^2)}\,dy = -\log|1-y| + \log|1+y| + 2\,\mathrm{arctg}\,y + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

e dunque

$$\left(\int\left[y+\frac{4}{(1-y^2)(1+y^2)}\right]dy\right)_{y=e^x} = \left(\frac{y^2}{2}+\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + 2\,\mathrm{arctg}\,y + c\right)_{y=e^x}$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} + \log\left|\frac{1+e^x}{1-e^x}\right| + 2\,\mathrm{arctg}\,e^x + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

3. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della serie

$$\sum_n \frac{e^{\alpha n}(n+1)}{n^2+\cos(n!)} \arctan(n^{\alpha-1}).$$

Il termine generale della serie è

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+\cos(n!)} \cdot e^{\alpha n} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)$$

e dunque $a_n \sim b_n = \frac{e^{\alpha n}}{n} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)$

quando $n \to +\infty$

Studiamo quindi $\sum_n b_n$

Dato che $|\operatorname{arctg} x| \leq \frac{\pi}{2}$ $\forall x$, si ha che

$\alpha > 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{|b_n|} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{\alpha} > 1$ e dunque

la serie $\sum_n b_n$ diverge

$\alpha = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} = 1 \Rightarrow b_n = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^{1-\alpha}} \sim \frac{1}{n^2}$

e quindi $\sum_n b_n$ converge.

$\alpha < 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} < 1 \Rightarrow \sqrt[n]{b_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{\alpha} < 1$

$\Rightarrow \sum_n b_n$ converge

1. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = 21e^{5x} + 5e^x, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 17, \end{cases}$$

e indicare esplicitamente l'intervallo più grande contenente $x = 0$ in cui tale soluzione è definita.

1) Integrale generale omogenea $y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = 0$
L'equazione caratteristica associata è
$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda+4)(\lambda-1) = 0$
che ha come soluzioni $\lambda_1 = -4$ $\lambda_2 = 1$
a cui corrispondono le soluzioni e^{-4x} ed e^x
dell'omogenea associata

$$y_{omo}(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^x \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2) Una soluzione particolare di
$$y'' + 3y' - 4y = 21 e^{5x}$$
si può cercare nella forma $\bar{y}(x) = k e^{5x}$
ovvero, imponendo sia soluzione
$$(k \cdot e^{5x})'' + 3(ke^{5x})' - 4ke^{5x} = 21 e^{5x}$$
$$(25k + 15k - 4k)\cancel{e^{5x}} = 21\cancel{e^{5x}} \Rightarrow k = \frac{\overset{7}{\cancel{21}}}{\underset{12}{\cancel{36}}}$$

ovvero $y_{p_1}(x) = \frac{7}{12} e^{5x}$ è soluzione particolare relativa al termine noto $21e^{5x}$

3) e^x è soluzione dell'omogenea associata, dunque una soluzione particolare di
$$y'' + 3y' - 4y = 5e^x$$
la posso cercare nella forma $\bar{y}(x) = x \cdot (k e^x)$
Imponendo che $\bar{y}(x)$ sia soluzione trovo

$$(kxe^x)'' + 3(kxe^x)' - 4kxe^x = 5e^x$$

$$(ke^x + ke^x + kxe^x) + 3(ke^x + kxe^x) - 4kxe^x = 5e^x$$

$$e^x(2k + 3k) + xe^x\cancel{(k + 3k - 4k)} = 5e^x$$

$\Rightarrow k = 1 \Rightarrow y_{p_2}(x) = xe^x$ è soluzione particolare di $y'' + 3y' - 4y = 5e^x$

Da 1), 2) e 3) ottengo (per il principio sovrapposizione degli effetti) $y_{gen}(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^x + \frac{7}{12} e^{5x} + xe^x$

$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

è l'integrale generale (la totalità delle soluzioni) dell'eq. di partenza

$y_{gen}(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^x + \frac{7}{12} e^{5x} + xe^x$ $\qquad y(0) = c_1 + c_2 + \frac{7}{12} = 2$

$y'_{gen}(x) = -4c_1 e^{-4x} + c_2 e^x + \frac{35}{12} e^{5x} + e^x + xe^x$ $\qquad y'(0) = -4c_1 + c_2 + \frac{35}{12} + 1 = 17$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{17}{12} \\ -4c_1 + c_2 = 16 - \frac{35}{12} = \frac{157}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{5}^{1} c_1 = \frac{\cancel{140}^{28}}{12} \\ \text{"} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{7}{3} \\ c_2 = \frac{17}{12} + \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = -7/3 \\ c_2 = 45/12 = 15/4 \end{cases}$$

Dunque la soluzione è la seguente

$$y(x) = -\frac{7}{3} e^{-4x} + \frac{15}{4} e^x + \frac{7}{12} e^{5x} + xe^x$$