Analisi Matematica 1

Lunedì 16 giugno 2014

Correzione della IV^a prova in itinere

1. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = 21e^{5x} + 5e^{x}, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 17, \end{cases}$$

e indicare esplicitamente l'intervallo più grande contenente $x = 0$ in cui tale soluzione è definita.

1) Integrale generale omogenea $y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = 0$

L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda+4)(\lambda-1) = 0$$

che ha come soluzioni $\lambda_1 = -4$ $\lambda_2 = 1$

a cui corrispondono le soluzioni e^{-4x} ed e^{x} dell'omogenea associata

$$y_{omo}(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2) Una soluzione particolare di

$$y'' + 3y' - 4y = 21e^{5x}$$

si può cercare nella forma $\sigma(x) = ke^{5x}$

ovvero, imponendo sia soluzione

$$(k \cdot e^{5x})'' + 3(ke^{5x})' - 4ke^{5x} = 21e^{5x}$$

$$(25k + 15k - 4k)\cancel{e^{5x}} = 21\cancel{e^{5x}} \Rightarrow k = \frac{\cancel{21}\,7}{\cancel{36}\,12}$$

ovvero $y_{p_1}(x) = \frac{7}{12}e^{5x}$ è soluzione particolare relativa al termine noto $21e^{5x}$

3) e^{x} è soluzione dell'omogenea associata, dunque una soluzione particolare di

$$y'' + 3y' - 4y = 5e^{x}$$

la posso cercare nella forma $\sigma(x) = x \cdot (ke^{x})$

Imponendo che $\sigma(x)$ sia soluzione trovo

$$(kxe^x)'' + 3(kxe^x)' - 4kxe^x = 5e^x$$

$$(ke^x + ke^x + kxe^x) + 3(ke^x + kxe^x) - 4kxe^x = 5e^x$$

$$e^x(2k + 3k) + xe^x\cancel{(k+3k-4k)} = 5e^x$$

$\Rightarrow k = 1 \Rightarrow y_{p_2}(x) = xe^x$ è soluzione particolare di $y'' + 3y' - 4y = 5e^x$

Da 1), 2) e 3) ottengo (per il principio sovrapposizione degli effetti) $y_{gen}(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^x + \frac{7}{12} e^{5x} + xe^x$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

è l'integrale generale (la totalità delle soluzioni) dell'eq. di partenza

$$y'_{gen}(x) = -4c_1 e^{-4x} + c_2 e^x + \frac{35}{12} e^{5x} + e^x + xe^x$$

Per determinare la soluzione del pb. di Cauchy impongo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} y_{gen}(0) = c_1 + c_2 + \frac{7}{12} = 2 \\ y'_{gen}(0) = -4c_1 + c_2 + \frac{35}{12} + 1 = 17 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5c_1 - \frac{28}{12} - 1 = -15 \\ // \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{\cancel{40}^{10}}{\cancel{12}_3} - 15 \qquad c_1 = -\frac{35}{3}$$

$$c_2 = 2 - \frac{7}{12} - c_1 \Rightarrow c_2 = \frac{24}{12} - \frac{7}{12} + \frac{140}{12} = \frac{157}{12}$$

$$y(x) = -\frac{35}{3} e^{-4x} + \frac{157}{12} e^x + \frac{7}{12} e^{5x} + xe^x$$

è la soluzione cercata, che è definita su tutto $\mathbb{R}$

2. Determinare, data la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)},$$

(i) l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$;

(ii) la forma esplicita di $f(x)$;

(iii) il valori $f(1)$ e $f(-1)$.

$$\sum_n a_n \cdot x^{n+1} = x \sum_n a_n x^n \qquad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

è una serie di potenze, ed il suo raggio di convergenza

$$R = \frac{1}{\max\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$$

dunque la serie converge in $]-1,1[$.

Inoltre, quando $x=-1$ la serie diventa

$$\sum_n \frac{1}{n(n+1)} = \sum_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

e dunque converge e si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

(serie di Mengoli)

Quando $x = 1$ la serie diventa $\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$

che converge per il criterio confronto asintotico

Quando $|x| > 1$ la serie non converge

Dunque $S = [-1, 1]$

2) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} x^{n+1}$ $\qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n$

$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 0$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n+1} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n}_{\text{serie geometrica ragione } -x!}$$

Ovvero $f''(x) = \frac{1}{1+x}$

integrando x serie $f'(x) = \log(1+x) + c$ $\qquad$ ma $f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

integrando x serie $f(x) = (1+x)\log(1+x) - (1+x) + c$ $\quad$ ma $f(0) = 0 \Rightarrow c = 1$

Dunque $f(x) = (1+x)\log(1+x) - x \qquad x \in [-1,1]$

3) Per il Teorema di Abel

$$f(-1) = \lim_{x\to -1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \cdot x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\shortparallel$$

$$1$$

$$f(1) = 2\log 2 - 1 = \lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

3. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita da

$$a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{6}n\right) + \frac{n^2+1}{n^2+4}\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Determinare $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ e $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$. Stabilire quindi se la successione converge.

Si osserva che $a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{6}n\right) + \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) \quad n\to+\infty$

$$= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{6}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + o\left(\tfrac{1}{n}\right) = b_n + o\left(\tfrac{1}{n}\right) \quad n\to+\infty$$

conviene quindi studiare b_n che ha lo stesso comportamento di a_n

$b_0 = 1$

$b_1 = -\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

$b_2 = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$

$b_3 = -\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi = -1 - 1 = -2$

$b_4 = \sin\frac{2}{3}\pi + \cos\frac{4}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$

$b_5 = -\sin\frac{5}{6}\pi + \cos\frac{5}{3}\pi = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

$b_6 = \sin\pi + \cos 2\pi = 1$

$b_7 = -\sin\frac{7}{6}\pi + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$b_8 = \sin\frac{4}{3}\pi + \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$

$b_9 = -\sin\frac{3}{2}\pi + \cos 3\pi = 1 - 1 = 0$

$b_{10} = \sin\frac{5}{3}\pi + \cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$

$b_{11} = -\sin\frac{11}{6}\pi + \cos\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$b_{12} = \sin 2\pi + \cos 4\pi = 1 = b_0$

$b_{13} = -\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = 0 = b_1$

$b_{14} = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = b_2$ etc

Dunque $-2 = \lim\limits_{n\to+\infty} b_{(3+12n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{(3+12n)} = \min\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

$1 = \lim\limits_{n\to+\infty} b_{(6+12n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{(6+12n)} = \max\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

4.Provate o confutate le seguenti proposizioni:

(a) "Date due funzioni L-Lipschitziane $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, allora la funzione $f * g$ è L^2–Lipschitziana".

(b) "Date due funzioni L-Lipschitziane e limitate $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, allora la funzione $f * g$ è Lipschitziana".

a) FALSA : prese $f(x) = g(x) = x$, queste sono funzioni 1-Lipschitziane ma $h(x) = x^2$ è t.c. $h'(x) = 2x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

e dunque $h(x)$ non è Lipschitziana

b) VERA : prese f, g L-Lipschitziane e limitate si ha

$\exists L > 0 : \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x,y \geq 0$

" $\quad |g(x) - g(y)| \leq L|x-y| \quad$ "

$\exists K > 0 : \quad |f(x)| \leq K \quad \forall x \geq 0$

$|g(x)| \leq K \quad$ "

Ne segue che, posto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)|$$

$$\leq |g(x)| \cdot |f(x) - f(y)| + |f(y)|\,|g(x) - g(y)|$$

$$\leq \left(\sup_{x \geq 0} |g(x)|\right) |f(x) - f(y)| + \left(\sup_{x \geq 0} |f(y)|\right) |g(x) - g(y)|$$

$$\leq K \cdot L \cdot |x-y| + K \cdot L \cdot |x-y|$$

$$\leq 2KL \cdot |x-y| \qquad \forall x,y \geq 0$$

ovvero $f \cdot g$ è $2KL$ - Lipschitziana

su $[0, +\infty[$